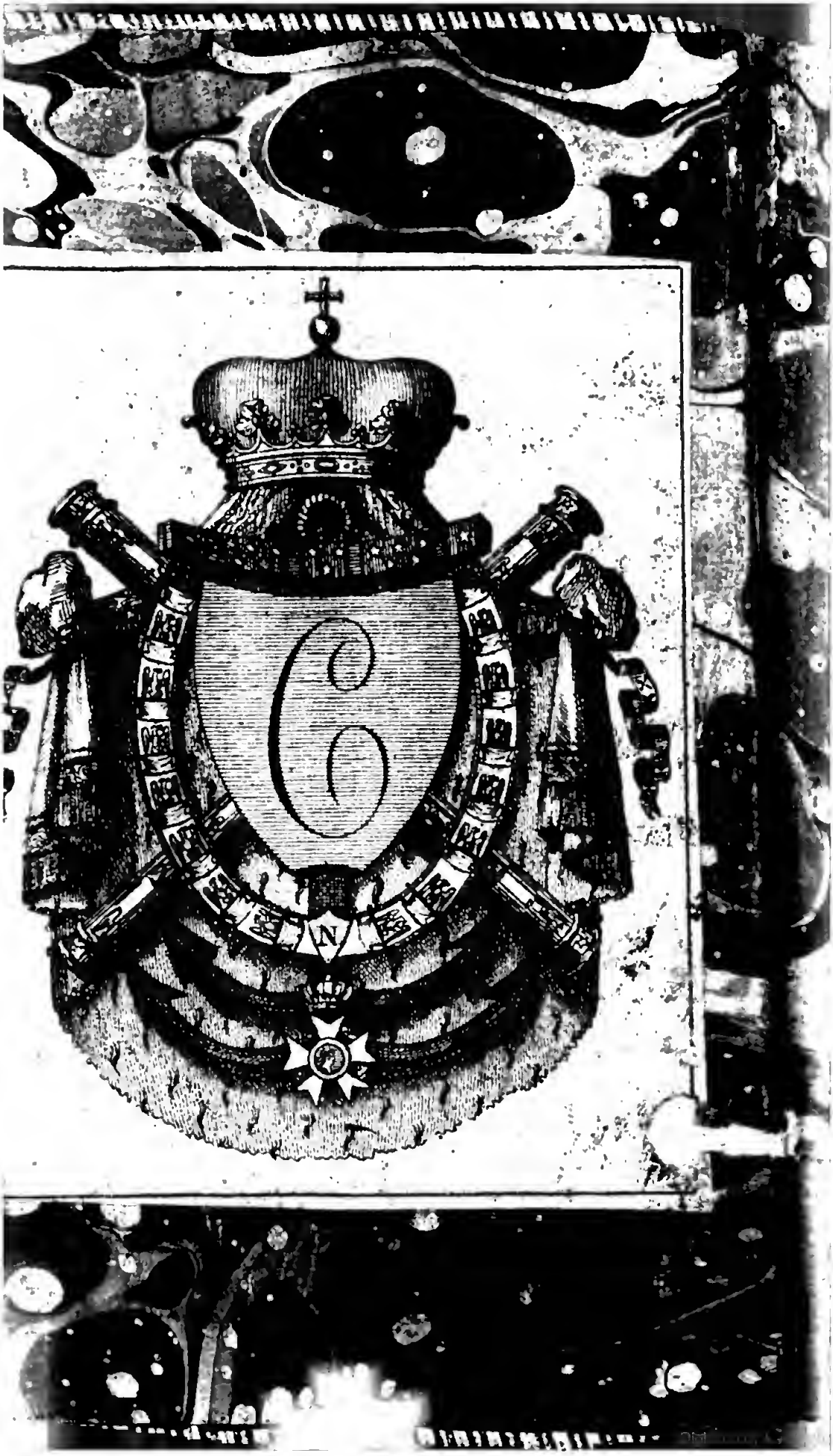
Digitized by Google


6
N

5726

Palat. L. 1. (109

BIBLIOTHÈQUE
UNIVERSELLE
DES DAMES.

Septième Classe.

MATHÉMATIQUES.

BIBLIOTECA NAPOLI

Il paroît tous les mois deux volumes de cette Bibliothèque. On les délivre soit brochés, soit reliés en veau fauve ou écaillé, & dorés sur tranche, ainsi qu'avec ou sans le nom de chaque Souscripteur imprimé au frontispice de chaque volume.

La souscription pour les 24 vol. reliés est de 72 liv., & de 54 liv. pour les volumes brochés.

Les Souscripteurs de Province, auxquels on ne peut les envoyer par la poste que brochés, payeront de plus 7 liv. 4 s. à cause des frais de poste.

Il faut s'adresser à M. CUCHET, Libraire, *rue & hôtel Serpente, à Paris.*

BIBLIOTHÈQUE
UNIVERSELLE
DES DAMES.
GÉOMÉTRIE.

TOME SECOND.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

A PARIS,

RUE ET HÔTEL SERPENTE.

Avec Approbation & Privilége du Roi.

1790.

BIBLIOTHÈQUE
UNIVERSELLE
DES DAMES.
GÉOMÉTRIE.
LIVRE SECOND.
DES SURFACES.
Des rapports & de la meſure des ſurfaces planes.

NOUS ayons dit que la grandeur conſidérée avec deux dimenſions ſeulement, eſt ce qu'on déſigne en Géométrie par le mot de *ſurface*; & qu'alors une de ces dimenſions eſt appelée ſa *longueur*, & l'autre ſa *largeur*.

Les ſurfaces ſont *planes* ou *courbes*. On appelle *planes* celles ſur leſquelles une ligne droite peut s'appliquer en tout

ſens en ſe confondant avec elles ; & *courbes* celles où l'on ne peut point faire une ſemblable application.

156. Meſurer une quantité, c'eſt déterminer combien de fois elle en contient une autre, qui pour cette raiſon eſt appelée ſa *meſure* ou ſon *unité*. Cette unité doit être de la même eſpece que la quantité meſurée ; puiſqu'entre des quantités hétérogènes, on ne peut concevoir aucun rapport de grandeur. Ainſi une ſurface ne ſauroit être meſurée que par une ſurface. Mais comme parmi les différentes eſpèces de figures qui pourroient ſervir à cet objet, la plus propre eſt celle qui a ſes angles droits & ſa hauteur égale à ſa baſe, on a pris le quarré de préférence à toute autre figure, pour meſurer les ſurfaces. C'eſt pourquoi *quarrer* une ſurface ne déſigne autre choſe que la *meſurer*, ou *déterminer combien de fois elle contient un quarré d'une grandeur donnée*, le-

quel eſt appelé *pied quarré*, *toiſe quarrée*, &c. ſuivant que la longueur d'un de ſes côtés eſt d'un *pied courant*, d'une *toiſe courante*, &c.

Remarque. Nos Lecteurs pourront ſe ſervir d'un *damier*, ou *échiquier*, pour mieux concevoir les rapports des ſurfaces entr'elles. Avec des régles, ou des cartons échancrés à volonté & appliqués ſur les caſes du damier, ils formeront des ſurfaces diviſées à l'œil.

157. Théorême I. *Les ſurfaces de deux triangles (& par conſéquent celles de deux parallélogrammes) qui ont des baſes égales ſont entr'elles comme leurs hauteurs* [*Fig.* 54].

Démonstration. Soient les deux triangles ABC, DEF, dont les baſes BC, EF ſont égales, & les hauteurs AH, DI, inégales: ſoit CG=BH & FK=EI. Alors on aura GH=KI, & comme ces lignes peuvent être priſes pour les hauteurs des triangles AGH,

DKI, on aura AGH:DKI::AH:DI. Or, AGH=ABC & DKI=DEF; donc ABC:DEF::AH:DI.

158. THÉORÊME II. *Si les baſes de deux parallélogrammes* S *& s ſont entr'elles comme les nombres* B, *b: leurs hauteurs comme les nombres* H, *h; & que les unes & les autres varient à-la-fois, on aura* S:*s*::B×H:*b*×*h*.

DÉM. Si les baſes ſeules étoient différentes, on auroit S:*s*::B:*b*; & ſi c'étoit les hauteurs, il viendroit S:*s*::H:*h*. Donc les unes & les autres variant à-la-fois, on aura S:*s*::B×H:*b*×*h*.

159. COROLLAIRE. Il ſuit de-là que ſi le parallélogramme *s* eſt un quarré, & qu'on le prenne pour unité de ſurface, tandis que ſa baſe ou ſa hauteur ſervent d'unité de longueur, pour meſurer la baſe & la hauteur de S; on aura S:*s*::B×H:I. C'eſt-à-dire, qu'*exprimant le rapport de la baſe &*

de la hauteur de S *par celui des deux nombres* B, H, *qui ont la baſe ou la hauteur s pour unité, on ſera aſſuré que le parallélogramme* S *contient autant de fois ſa meſure s, que le produit* B × H *contient d'unités.* Ce qui s'exprime en diſant, *que la ſurface d'un parallélogramme eſt égale au produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur.* (On voit aſſez que cette propoſition priſe dans le ſens littéral, eſt abſurde; car il eſt impoſſible de multiplier une ligne par une ligne, & d'avoir une ſurface pour produit. Ainſi on doit chercher le vrai ſens de cet énoncé dans ce qui le précéde, & le regarder comme une expreſſion abrégée qu'on n'emploie ici que pour éviter une trop longue circonlocution.)

160. SCHOLIE. Pour rendre cette vérité plus manifeſte, ſuppoſons que le quarré *a c* doive ſervir d'unité, pour meſurer le rectangle [*Fig.* 55] A C,

Suivant ce que nous avons dit, on doit d'abord chercher le nombre B, qui exprime combien de fois la baſe AB contient ſon unité *ab*, & je le ſuppoſe ici 4; enſuite le nombre H, qui exprime combien de fois la hauteur AD contient cette même unité *ab*, ou ſon égale *ad*; je ſuppoſe que ce nombre ſoit 3; & alors 4 × 3, ou 12, exprimera combien de fois l'unité de ſurface *ac* eſt contenue dans AC. En effet, ſi on prend ſur AB quatre parties égales à *ab*, & trois ſur AD, & que par les points de diviſion E, F, G, H & I, on élève des perpendiculaires E*e*, F*f*, G*g*, H*h*, I*i*, on formera dans le rectangle AC douze quarrés, dont chacun ſera égal à *ac*.

161. COROLLAIRE. *Pour avoir la ſurface d'un triangle quelconque, il faut donc prendre la moitié du produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur*; puiſqu'il eſt toujours la moitié

du parallélogramme de baſe égale & de hauteur égale.

162. THÉORÊME III. *La ſurface d'un trapèze* PQRS *doit être* [*Fig.* 56] *exprimée par le produit de la perpendiculaire* PH, *tirée entre les côtés parallèles* PQ, RS, *multipliée ou par la demi-ſomme de ces côtés, ou par la ligne* MN, *tirée du milieu de* PS *parallèlement à* PQ.

DÉM. 1°. Le triangle $PSR = PH \times \frac{1}{2}SR$, & le triangle $PQR = PH \times \frac{1}{2}PQ$. Donc la ſurface du trapèze, ou la ſomme de ces deux triangles, ſera

$$PH \times \frac{SR + PQ}{2}.$$

2°. Le trapèze pouvant être pris pour un triangle tronqué, dans lequel les parallèles PQ, MN, SR, ſont à égales diſtances, on a $\frac{1}{2}SR, MN, PQ$. Donc $MN = \frac{SR + PQ}{2}$, & par

conſéquent la ſurface du trapèze pourra encore être exprimée par $PH \times MN$.

163. THÉORÊME IV. *La ſurface d'un polygone régulier* ABDEFG, *eſt exprimée par la moitié du produit de ſon contour multiplié par ſon apothéme* [*Fig.* 33].

DÉM. Si on joint les ſommets des angles, oppoſés du polygone par les droites AE, BF, DG, on le partagera en triangles iſoſcèles ACB, BCD, &c. qui ont tous la même hauteur, ſavoir, l'apothème (106), & dont les baſes forment le contour entier du polygone. Donc déſignant l'apothème par p, on a $ACB = \frac{1}{2}p \times AB$: $BCD = \frac{1}{2}p \times BD$: $DCE = \frac{1}{2}p \times DE$, &c. Donc la ſomme de tous les triangles ou la ſurface du polygone $= \frac{1}{2}p(AB + BD + DE + EF + FG + GA)$.

164. COROLLAIRE. Puiſque le cercle peut être conſidéré comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, & que

ſous ce rapport il a le rayon pour apothème, il s'enſuit que *ſa ſurface eſt égale au produit du rayon multiplié par la demi-circonférence*; ou *à celle d'un quarré dont le côté ſeroit moyen proportionnel entre le rayon & la demi-circonférence*; ou encore *à celle d'un triangle qui auroit le rayon pour hauteur, & la circonférence pour baſe.*

165. COROLLAIRE II. La ſurface d'un ſecteur de polygone régulier qui ne contient que des triangles entiers comme ABCD (& par conſéquent celle d'un ſecteur circulaire) eſt égale *à la moitié du produit de l'apothème multiplié par la partie du contour qui termine ce ſecteur.* D'où il ſuit que pour avoir la ſurface du ſegment circulaire APG, il ſuffiroit de retrancher de celle du ſecteur CAPG la ſurface triangulaire CAG.

166. SCHOLIE I. Pour avoir la ſurface d'un polygone irrégulier, on le partage

en triangles, dont on trouve & réunit les ſurfaces ?

167. SCHOLIE II. D'après tout ce que nous avons dit juſqu'ici, on voit que le fameux problême de la *quadrature du cercle* conſiſte à trouver exactement la ſurface de cette figure, ou à faire voir qu'elle ne peut point être trouvée ; car l'une & l'autre de ces deux manières réſoudroit également la queſtion. Et comme cette ſurface ſeroit connue (164), ſi l'on trouvoit le rapport exact de la circonférence à une ligne droite donnée, c'eſt à la recherche de ce rapport que les Géométres ſe ſont attachés. Quelques-uns ont prétendu que ſa valeur eſt inaſſignable, & qu'ainſi la quadrature du cercle eſt impoſſible ; d'autres au contraire ont cru ce rapport aſſignable, & ont fixé des limites plus ou moins rapprochées, entre leſquelles il ſe trouve. Ainſi Archimède a fait voir que le diamètre étant 7, la circonférence eſt entre

21 & 22, mais plus près de 22 que de 21. Adrien Metius a donné un rapport plus approché, en disant que le diamètre étant 113, la circonférence est entre 354 & 355, mais plus près de ce dernier nombre que de l'autre. Ludolph en a approché jusqu'à la trente-cinquième décimale. De Lagny a encore porté cette approximation plus loin dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, de l'année 1719, en disant que le diamètre étant 1, la circonférence sera exprimée par 3,141592, &c. jusqu'à 127 caractères décimaux, de manière qu'il ne s'en faudra pas d'une unité décimale du 127e rang, qu'on n'ait par-là la véritable valeur de la circonférence. Enfin Neuton, Léibnitz & d'autres grands Géomètres (car ce n'est qu'à ceux-là qu'il appartient d'espérer quelques succès dans cette recherche) ont trouvé différentes approximations, parmi lesquelles nous nous borne-

rons à rapporter la ſuivante, dont l'invention eſt attribuée à Léibnitz, quoique d'autres Géomètres l'aient réclamée dans le tems ; ſavoir que le quarré du rayon étant un, le quarré du cercle ſera $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ &c. Ainſi à l'infini, en approchant toujours de ſa valeur alternativement en-deſſus & en-deſſous.

168. THÉORÊME V. *Dans tout triangle rectangle* ABC [*Fig.* 57], *le quarré* BG *conſtruit ſur l'hypothénuſe eſt égal à la ſomme des quarrés* AD + AE, *conſtruits ſur les deux côtés.* (Ce théorême important eſt appelé le théorême de Pythagore, parce que ce célèbre philoſophe en eſt l'inventeur. D'autres l'appellent le *Moulin de Pythagore*, à cauſe de la reſſemblance de la *figure* avec celle d'un moulin à vent.)

DÉM. Par le point A, tirez la ligne AH parallèle à CG, & joignez les

points A & G, A & F, joignez encore les points D & B, C & E. Cela posé, le triangle DCB = ACG, car l'angle en C est égal dans chacun, puisqu'outre un angle droit il contient la partie commune ACB; & de plus les côtés autour de cet angle, savoir DC & AC, CB & CG, sont égaux. Or le triangle DCB est la moitié du quarré DA, de même base & de même hauteur; de même le triangle ACG est la moitié du parallélogramme CH. Donc le quarré DA = CH : par un raisonnement semblable on prouvera que AE = PF. Donc DA + AE = CF.

169. COROLLAIRE. Il suit de-là que si on donne en nombres le quarré de l'hypothénuse $= c^2$, & le quarré d'un côté $= b^2$, désignant le nombre qui exprime l'autre côté par a, on auroit $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Et connoissant en nombres les quarrés des deux côtés a^2, b^2, pour trouver l'expression numé-

rique de l'hypothénuſe c, on auroit $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Donc ſi les deux côtés ſont égaux, ou ſi $a = b$, il viendra en ſubſtituant a pour b, $c = \sqrt{2aa} = a\sqrt{2}$, c'eſt-à-dire, qu'alors le nombre qui exprime l'hypothénuſe eſt *incommenſurable* avec a ou b. Or dans ce cas le triangle rectangle eſt la moitié d'un quarré, & l'hypothénuſe en eſt la diagonale. Donc *les nombres qui expriment les côtés d'un quarré ſont toujours incommenſurables avec celui qui en exprime la diagonale.*

170. THÉORÊME VI. *Deux ſurfaces quelconques* S, s, *ſont entr'elles comme les produits des nombres dont les rapports expriment ceux de leurs élémens linéaires.*

DÉM. Suppoſons que u ſoit l'unité de ſurface, & que ces élémens linéaires ſoient la longueur & la hauteur, tandis que le rapport des deux nombres B & H

exprime celui des élémens linéaires de S, & que le rapport des deux nombres b, h, exprime celui des élémens de s; ce qui donnera

$$S : u :: BH : 1$$
$$u : s :: 1 : bh,$$

d'où l'on conclura que $S : s :: BH : bh$.

171. COROLLAIRE I. Il ſuit de-là que *ſi deux ſurfaces ſont égales, leurs élémens linéaires ſont en raiſon réciproque.* Car ſi $S = s$, $BH = bh$. Donc $B : b :: h : H$. (On voit évidemment que l'inverſe eſt encore vraie, c'eſt-à-dire, que ſi $B : b :: h : H$, on a $S = s$, puiſqu'alors $BH = bh$.) Or, les élémens linéaires qui déterminent la ſurface d'un triangle ou d'un parallélogramme ſont la baſe & la hauteur (159). Donc *deux triangles ou deux parallélogrammes égaux ont leurs baſes en raiſon inverſe de leurs hauteurs, & réciproquement.*

172. COROLLAIRE II. Lorſque deux figures S, *s*, ſont ſemblables, toutes leurs dimenſions homologues ſont proportionnelles. Donc B : *b* :: H : *h* :: une dimenſion quelconque de la première, eſt à une dimenſion homologue de la ſeconde. Et par conſéquent la proportion S : *s* :: BH : *bh* devient S : *s* :: $B^2 : b^2 :: H^2 : h^2$. C'eſt-à-dire, que *deux figures ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés des nombres qui expriment leurs dimenſions homologues quelconques.*

173. Il ſuit de-là que ſi l'on conſtruit ſur les trois côtés d'un triangle [*Fig.* 58] rectangle ABC, trois polygones ſemblables, de telle manière que les lignes AC, CB, BA, en ſoient des dimenſions homologues, la ſurface S de celui qui ſera conſtruit ſur l'hypothénuſe vaudra la ſomme P + Q des ſurfaces des deux autres. Car déſignant l'hypothénuſe par le nombre A, un côté par le

nombre B, & l'autre par le nombre C, on aura (178),

$$S : P :: A^2 : B^2,$$

$$S : Q :: A^2 : C^2.$$

Donc $2S : P+Q :: 2A^2 : B^2+C^2$, ou $S : P+Q :: A^2 : B^2+C^2$. Or (174), $A^2 = B^2+C^2$. Donc $S = P+Q$.

174. On peut déduire de-là la quadrature des eſpaces circulaires, connus ſous le nom de *lunules d'Hypocrate*. (Hypocrate étoit un Géomètre grec, connu par cette découverte.) Car ſi on décrit ſur les trois côtés d'un triangle rectangle ABC, pris pour diamètres, [*Fig.* 59], trois demi-cercles ALB, AEC, CDB, la ſurface de celui qui ſera décrit ſur l'hypothénuſe vaudra la ſomme des ſurfaces des deux autres (173). Donc ce qui ne ſera pas commun de part & d'autre, ſera égal, ou bien on aura AEGM + CDBL = ACB, c'eſt-à-dire, que *la ſurface des deux*

lunules circulaires ſera égale à celle du triangle rectangle, ſur lequel elles ſont conſtruites.

175. THÉORÊME VII. *Dans un triangle rectangle* ABD, *le quarré formé ſur l'hypothénuſe (qu'on déſigne par* AD^2*) eſt aux* [*Fig.* 60] *quarrés* AB^2, BD^2, *formés ſur les côtés, comme l'hypothénuſe eſt à chacun de ſes ſegmens* AP, PD, *formés par une perpendiculaire* BP, *abaiſſée du ſommet de l'angle droit.*

DÉM. Les triangles ABD, ABP, BPD, ſont ſemblables; donc ils ſont comme les quarrés AD^2, AB^2, BD^2: d'ailleurs ces triangles ont une même hauteur BP, donc ils ſont comme leurs baſes AD, AP, PD. Donc $AD^2 : AB^2 : BD^2 :: AD : AP : PD$.

176. COROLLAIRE. L'on conclura de-là que les quarrés conſtruits ſur deux cordes AB, AC, menées de l'extrémité d'un diamètre AD, ſont entr'eux

comme les portions correſpondantes du diamètre, ſavoir, AP, AQ, interceptées entre le point A & les perpendiculaires BP, CQ, abaiſſées de l'autre extrêmité de ces cordes ſur le diamètre. Car les triangles ABD, ACD étant rectangles, on a (175)

$$AB^2 : AD^2 :: AP : AD,$$
$$AD^2 : AC^2 :: AD : AQ,$$

Donc $AB^2 : AC^2 :: AP : AQ$.

177. PROBLÊME I. *Réduire une figure rectiligne quelconque* [*Fig.* 61] ABCDE *à une autre d'égale ſurface, & qui ait un angle de moins?*

Suppoſons qu'on veuille ôter l'angle C: pour cela, tirez par les extrêmités de ſes côtés la droite DB: par le point C menez-lui la parallèle CF, juſqu'à la rencontre en F du côté AB prolongé, & tirez la droite DF. Je dis que le quadrilatère AFDE = le pentagone

ABCDE. Car le triangle BGF qu'on a ajouté eſt égal au triangle DGC qu'on a retranché ; puiſque les triangles BDF, BDC, étant égaux à cauſe des paralleles, ce qu'ils n'ont pas de commun, ſavoir, BGF, DGC, ſera égal de part & d'autre.

Remarque. On peut par ce moyen réduire un polygone irrégulier quelconque à un triangle, & en meſurer ainſi la ſurface.

178. Problême II. *Conſtruire un quarré égal à deux ou à pluſieurs autres quarrés donnés* [*Fig.* 51].

Solution. Joignez les deux côtés AB, BC des deux quarrés donnés, de façon qu'ils faſſent un angle droit en B ; & le quarré conſtruit ſur l'hypothénuſe AC vaudra la ſomme des quarrés conſtruits ſur AB & ſur BC (168). Si on vouloit un quarré qui en contînt un de plus, on éleveroit ſur l'extrêmité de l'hypothénuſe AC la per-

pendiculaire C D égale au côté de ce troiſième, & le quarré conſtruit ſur A D vaudroit les trois quarrés donnés : on procéderoit de même pour y ajouter le quarré conſtruit ſur D E ; de ſorte que le quarré conſtruit ſur l'hypothénuſe A E vaudroit la ſomme des quatre précédens, &c. &c.

Des ſurfaces planes conſidérées par rapport à leurs poſitions reſpectives.

179. Une ſurface plane ou un *plan* peut avoir relativement à d'autres plans, ou relativement à des lignes droites, tous les rapports de ſituation que ces dernières admettent entr'elles ; & ces rapports peuvent être définis ainſi qu'ils l'ont déjà été en parlant des lignes. Ainſi un plan eſt *perpendiculaire* à un autre, lorſqu'il ne penche d'aucun côté ſur celui-ci, ou lorſqu'il fait avec lui un ou deux angles droits : il lui eſt *oblique*, lorſqu'il penche plus d'un côté

que de l'autre : & enfin deux plans ſont *parallèles*, lorſqu'ils ne ſe rencontrent ni ne peuvent ſe rencontrer, à quelque diſtance qu'on les prolonge; ou encore lorſque ſur l'un des plans, on peut tirer en plus d'un ſens (& par conſéquent en tout ſens) des droites parallèles à d'autres droites, priſes ſur l'autre plan.

Il y a deux différentes manières de concevoir la formation des plans, en ſe repréſentant qu'une ligne droite BC, [*Fig.* 78], ſe meut le long de BA, reſtant toujours parallèle à elle-même; ou que BC tourne ſur le point B, faiſant toujours un angle droit avec AB. Dans ces deux cas l'eſpace parcouru par la droite BC ſera évidemment un *plan*; mais dans le cas de la révolution de cette droite, ce plan ſera terminé par une ligne circulaire.

180. THÉORÊME I. *Une ligne droite qui a deux points* G & D *dans un plan* AB, *eſt toute entière dans ce plan* [*Fig.* 74].

Dém. Sur le plan AB prolongeons la partie CD de la droite en queſtion juſqu'en E, & ſuppoſons qu'il y ait, s'il ſe peut, une autre partie DF de cette droite dans un plan ſupérieur ou inférieur au plan AB. Alors la prétendue droite CDF aura plus d'un point commun avec la droite CE, ſans ſe confondre avec elle, ce qui eſt abſurde.

181. THÉORÊME II. *Un triangle* ABC *eſt tout entier dans un même plan* [*Fig.* 75].

Dém. Si une partie ADEB étoit dans un plan, & l'autre partie DEC dans un autre, la droite AC auroit la partie AD dans le premier plan, & la partie DC dans le ſecond, ce qui eſt abſurde (180).

182. THÉORÊME III. *La ſection commune de deux plans* AB, DC, *eſt une ligne droite* [*Fig.* 76].

Dém. 1°. Cette ſection EF eſt une ligne. Car autrement elle auroit une

largeur, & par conſéquent un des deux plans auroit une épaiſſeur, ce qui eſt contre la ſuppoſition admiſe que les ſurfaces n'ont point de profondeur.

2°. Cette commune ſection EF eſt une ligne droite. Car autrement par les points E & F communs aux deux plans, on pourroit tirer ſur l'un la droite EHF, & ſur l'autre la droite EGF; & alors ces droites auroient deux points communs, ſavoir E & F, ſans ſe confondre, ce qui eſt encore abſurde.

183. THÉORÊME IV. *Deux ou pluſieurs plans ſe confondent lorſqu'ils ont trois points communs, pourvu que ces points ne ſoient pas en ligne droite.*

DÉM. Car ſi les trois angles d'un triangle aboutiſſent à ces trois points, les plans renfermeront chacun ce triangle; or (181), un triangle eſt tout entier dans le même plan; donc ces plans ſe confondront en un ſeul.

184. COROLLAIRE. Il ſuit de-là,

1°.

1°. que trois points qui ne ſont pas en ligne droite, déterminent la poſition d'un plan. 2°. Que deux lignes qui ſe rencontrent, peuvent toujours être miſes ſur le même plan. 3°. Qu'un point fixe & une ligne déterminée peuvent toujours être miſes ſur le même plan.

185. THÉORÊME V. *Si une ligne* AB *eſt perpendiculaire à-la-fois aux deux lignes* BC *&* BD, *qui ſe coupent, elle le ſera au plan de ces deux lignes* [Fig. 77].

DÉM. Concevez que la ligne BC reſtant toujours perpendiculaire à AB tourne ſur le point B : alors elle ſe confondra ſucceſſivement avec BD & avec toutes les perpendiculaires à AB, qu'on peut mener autour du point B, telles que BE, BF, &c. ou toutes ces perpendiculaires ſeront ſur le plan tracé par BC. Donc puiſque AB ne penche d'aucun côté par rapport à ces lignes, elle ne penchera point par rapport à

leur plan ; ou bien elle ſera perpendiculaire à ce plan. Or, celui-ci ayant ces trois points B, C, D, communs avec le plan qui contient les deux lignes BC, BD, ſe confondra avec lui (183). Donc AB ſera perpendiculaire au plan de ces deux lignes.

186. *Remarque.* On pourra, par un raiſonnement ſemblable, prouver l'inverſe de cette propoſition, ſavoir, que *ſi une ligne* AB *eſt perpendiculaire à un plan, elle le ſera à toutes les lignes* BC, BD, BE, &c. *qui, placées ſur ce plan, viennent aboutir au pied de cette perpendiculaire.*

187. Théorême VI. *Si la ligne* AB *eſt l'interſection commune de deux plans* BEFA, BCDA, *& que ſur le même point* P *de cette ligne, on éleve deux perpendiculaires* PR, PQ, *chacune ſur un de ces deux plans, l'arc* RQ, *qui meſurera l'angle* RPQ, *formé par ces plans perpendiculaires,*

meſurera auſſi l'angle formé par ces plans [*Fig.* 78].

Dém. Concevez d'abord qu'un de ces plans ſoit couché ſur l'autre, & qu'ainſi la ligne PR ſoit couchée ſur PQ : qu'enſuite l'une des deux étant immobile, l'autre faſſe une révolution entière ſur la ſection commune AB, & qu'ainſi le point R décrive une circonférence autour du point P. Alors une partie quelconque de la révolution de ce plan ſera à la révolution entière, comme l'arc QR, décrit dans cette partie de révolution, ſera à la circonférence. Donc l'arc QR, par ſon rapport à ſa circonférence, exprimera combien vaut une partie de révolution de ce plan, ou l'angle plan qu'elle forme, par rapport à la révolution entière. Cet arc eſt donc la meſure de l'angle plan, dans le même ſens que nous avons pris ailleurs, un pareil arc, pour la meſure de l'angle *linéaire*.

188. THÉORÊME VII. *Si une ligne* P*p* *eſt perpendiculaire au plan* AB, *tous les plans qui la renferment, tels que* CD, EF, &c. *ſeront perpendiculaires au même plan* AB [*Fig.* 79].

DÉM. Si ſur le plan AB & du point *p* on mène la ligne *p*R perpendiculaire à la ſection E*e*, & la ligne *p*S perpendiculaire à la ſection C*c*, elles ſeront l'une & l'autre perpendiculaires à P*p* (186); donc les angles P*p*R, P*p*S, ſeront droits; or, le premier meſure l'inclinaiſon du plan EF ſur AB & le ſecond celle du plan CD ſur AB (187). Donc ces deux plans ſont perpendiculaires ſur AB (179), & il en ſeroit de même de tous ceux qui renfermeroient la ligne P*p*.

189. Réciproquement, *ſi deux plans* CD, EF, *ſont perpendiculaires à un troiſième* AB, *leur interſection* P*p* *ſera une ligne perpendiculaire à ce troiſième*. Car tirant ſur ce plan AB & du

même point les droites pR, pS, les angles PpR, PpS ſeront droits, parce qu'ils meſureront l'inclinaiſon de ces plans ſur le plan AB (187). Donc Pp eſt perpendiculaire ſur les lignes pR, pS; & par conſéquent (185) elle l'eſt ſur le plan de ces deux lignes, lequel eſt AB.

190. THÉORÊME VIII. *Si deux plans parallèles* AC, *ac*, *ſont coupés par un troiſième* Ef, *leurs interſections* EF, ef, *ſeront deux lignes parallèles* [*Fig.* 80].

DÉM. Si ces deux lignes n'étoient pas parallèles, en les mettant ſur le même plan Ef, elles pourroient ſe rencontrer; & par conſéquent les deux plans AC, *ac*, ſe rencontreroient auſſi. Ils ne ſeroient donc pas parallèles (179); ce qui eſt contre la ſuppoſition.

191. *REMARQUE.* On voit aſſez par ce que nous avons dit ailleurs ſur les lignes droites, que ſi deux plans paral-

lèles ſont coupés par un troiſième, les angles correſpondans ſeront égaux entr'eux, ainſi que les alternes-internes & les alternes-externes; & réciproquement.

192. THÉORÊME IX. *Si d'un même point* P, *pris hors de deux plans parallèles* AB, *ab*, *on mène des droites* PR, PS, PT, PV, *à travers ces plans, elles deſſineront ſur chacun des figures ſemblables* RT, *rt* [*Fig.* 81].

DÉM. Si l'on conçoit un plan qui paſſe par les points R, S, P, il formera ſur les plans AB, *ab*, les deux interſections parallèles RS, *rs* (190), (par un ſemblable moyen on trouveroit que ST & *st*, TV & *tu*, VR & *ur*, TR & *tr* ſont parallèles): on aura donc cette ſuite de raiſons égales, RS : *rs* :: ST : *st* :: TR : *tr*; & par conſéquent les deux triangles RST, *rst*, ayant leurs côtés proportionnels, ſeront ſemblables. Donc l'angle S = *s*, & de plus tous les côtés autour de ces

angles ſeront proportionnels. Comme on peut faire le même raiſonnement pour les angles T & t, V & u, R & r, on en conclura que les deux quadrilatères RT, rt, ont leurs angles homologues égaux, & leurs côtés homologues proportionnels; & qu'ainſi ils ſont ſemblables.

193. COROLLAIRE I. Si du point P on tire la ligne PQ perpendiculaire aux deux plans, on aura toujours PQ:Pq:: PT:Pt::TV:tu. Or (171) VRST: $urst$ :: TV^2 : tu^2. Donc VRST: $urst$::PQ^2 : Pq^2; *c'eſt-à-dire, que les ſurfaces de ces deux figures ſont comme les quarrés de leurs diſtances au point* P. Or, les quarrés de ces diſtances ſont dans une raiſon conſtante par rapport aux deux plans immobiles AB, ab; *donc quelles que ſoient les figures deſſinées ſur ces plans paralleles & immobiles, par les mêmes droites qui partent d'un point fixe* P, *leurs ſurfaces ſont toujours dans le même rapport.*

194. COROLLAIRE II. *Deux angles* TVR, *tur*, *qui ne ſont pas ſur le même plan*, *ſont égaux*, *pourvu qu'ils aient leurs côtés homologues parallèles*. Car ils peuvent être mis ſur deux plans parallèles & devenir les angles homologues de deux figures ſemblables (192).

195. PROBLÊME I. *D'un point* P *pris hors d'un plan* AB, *abaiſſer une perpendiculaire à ce plan* [*Fig.* 82]?

SOLUTION. Tirez d'abord dans le plan AB la ligne indéfinie R*r*, & dans un plan qui paſſe par P & par R*r*, abaiſſez du point P la ligne PO perpendiculaire à R*r*; du point O, tirez dans le plan AB la ligne *p*O perpendiculaire à R*r*: joignez ſur un même plan le point P, & la ligne *p*O, & enfin du point P abaiſſez P*p* perpendiculaire ſur *p*O; je dis que cette ligne ſera la perpendiculaire cherchée.

Car ſi par le point *p* on mène ſur

le plan AB, la ligne *p*Q parallèle à R*r*, elle eſt perpendiculaire au plan P*p*O; puiſque ſa parallèle R*r* eſt perpendiculaire à ce plan (185). Donc Q*p* & O*p* ſeront perpendiculaires à P*p*; ou bien P*p* ſera perpendiculaire au plan des lignes Q*p*, O*p* (185); donc P*p* tombera du point *p* perpendiculairement ſur le plan AB.

196. PROBLÊME II. *Sur un point d, pris dans le plan* BC, *élever une perpendiculaire à ce plan* [*Fig.* 83]?

SOLUTION. D'un point quelconque E, pris hors de ce plan abaiſſez la perpendiculaire E*e*, & après avoir mis ſur un même plan le point *d* & la perpendiculaire E*e*, tirez à celle-ci une parallèle qui paſſe par le point *d*, & cette ligne *d*D ſera la perpendiculaire cherchée.

197. PROBLÊME III. *Par un point* P *mener des plans perpendiculaires au plan* AB [*Fig.* 79]?

SOLUTION. Abaiſſez de ce point ſur le plan AB la perpendiculaire P*p*, & tous les plans qui la renfermeront, ſeront perpendiculaires au plan AB (188).

198. *REMARQUE.* On voit par cette opération, que par un point fixe, on peut mener une infinité de plans perpendiculaires à un autre plan; mais que de ce même point on ne peut abaiſſer qu'une ſeule ligne.

De la diviſion des ſurfaces ou des HÉRITAGES.

199. PROBLÊME GÉNÉRAL FONDAMENTAL. *Elever ou abaiſſer un triangle à telle hauteur qu'on voudra?*

1°. Si on veut élever le triangle ABC à la hauteur de la ligne DE [*Fig.* 62] ſans que la ſurface ſoit augmentée ni diminuée, il faut premièrement élever la hauteur DE à-plomb ſur la baſe BC prolongée, & tirer par

le point E la ligne EF parallèle à la ligne BC, que l'on continuera jusqu'à ce qu'elle rencontre BA prolongée ; ce qui ne peut être qu'au point F ; duquel menant une ligne droite en C, vous tirerez ensuite par le point A, la ligne AG parallèle à la ligne FC. Enfin si vous tirez FG, vous aurez le triangle FGC égal au triangle ABC, & qui aura pour hauteur DE. En effet, GCF = ACF à cause de la même base & des parallèles AG, CF. Mais X = Z & BAC = BGF. Car BAC = P + *b* + X, & BGF = P + Z + *b*, ou P + X + *b*.

2°. Si au contraire il falloit abaisser un triangle [*Fig.* 63] tel que HKI à une hauteur telle que LI, il n'y auroit qu'à mener par le sommet L de cette ligne une parallèle à la base IK, laquelle coupera l'un des côtés du triangle en O, d'où l'on tirera une ligne droite au point K. Si ensuite on tire

par le point H une ligne HM parallèle à la ligne OK & prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre la baſe prolongée en M; & qu'enfin on tire la droite OM; on aura le triangle OMI égal à l'autre HKI.

200. PROBLÊME I. *Diviſer un triangle en pluſieurs parties égales par des lignes partant d'un point donné?*

Suppoſons qu'il faille diviſer un champ triangulaire ABC entre trois cohéritiers égaux, à la condition de leur laiſſer l'uſage d'un puits.

1°. Si le puits eſt placé au point A du champ ABC, diviſez le côté BC [*Fig.* 64] oppoſé à l'angle A en quatre parties égales; puis de ce point A tirez des lignes droites aux diviſions D, E, F, elles partageront le triangle comme on l'a demandé.

2°. Si le puits d'où l'on veut que partent les lignes de diviſion, étoit placé ſur l'un des côtés, comme ici en K [*Fig.* 65],

[*Fig.* 65], il faudroit diviſer le côté HI, ſur lequel eſt le puits en autant de parties égales qu'on veut que le champ ait de portions (par exemple, en trois), & des points de diviſion L & M mener des parallèles à la ligne tirée du point K à l'angle du ſommet G; ces parallèles couperont les côtés ſupérieurs en N & O, d'où tirant des lignes droites au point K, celles-ci partageront le champ comme il a été demandé.

3°. Enfin ſi le puits, d'où l'on veut que partent les lignes de diviſion, étoit dans le champ triangulaire, comme ici en D [*Fig.* 66], il faudroit diviſer la baſe BC en autant de parties égales qu'on veut que le triangle ait de portions (par exemple, en trois); puis ayant tiré une ligne DA du point donné à l'angle du ſommet, menez par les points de diviſion E & F, des parallèles coupant les côtés ſupérieurs en G

& H. Si vous tirez des lignes droites de D en E & G, vous aurez le trapèze BEDG pour tiers du triangle ABC, & ſi vous menez des lignes droites de D en H & F, le trapèze HDFC ſeroit le ſecond tiers; de ſorte que le reſte, c'eſt-à-dire, le triangle DEF, avec le trapèze GH ſeroit le troiſième. Mais comme ce dernier tiers eſt compoſé de deux figures, & qu'il faut qu'il ne le ſoit que d'une, faites rentrer le triangle DHI égal au triangle DEF, & qui ait pour hauteur la perpendiculaire DK, par ce moyen on aura les trapèzes GI & IE, qui ſeront chacun le tiers du triangle total, & qui auront tous accès au puits D.

201. PROBLÊME II. *Diviſer un quadrilatère en autant de parties égales qu'on voudra par des lignes qui partent d'un point donné à volonté?*

Suppoſons qu'il faille diviſer un champ trapézoïdal entre quatre cohé-

ritiers, à la condition que chaque diviſion ait un libre accès à un puits.

1°. Si le puits eſt placé au ſommet de l'angle B [*Fig.* 67], réduiſez d'abord cette figure en un triangle BAE, dont vous diviſerez la baſe AE en quatre parties égales aux points F, G, I, autant que de portions. Et ayant tiré une diagonale BD, menez par le point I ſa parallèle HI, enſuite de quoi, menez des lignes de B en F, en G & en H, elles partageront la figure en quatre parties égales.

2°. Si le point étoit placé ſur l'un des côtés, comme en P [*Fig.* 68], d'un champ quadrilatéral KM, réduiſez cette figure en un triangle KLO, dont vous diviſerez la baſe en autant de parties égales que vous voulez de portions (par exemple, en trois), & ayant menez des lignes droites du point P, à ces diviſions RS, vous tirerez leurs parallèles KT & KV, coupant la baſe

en T & V. Si vous tirez des lignes droites de P en V & en T, en arrêtant en X, vous aurez trois portions égales.

3. Enfin, si le puits étoit placé dans un champ de figure irrégulière BD [*Fig.* 69], comme ici en A, il faudroit premièrement réduire cette figure en un triangle BCF, dont on diviſera la baſe CF en autant de parties égales qu'on veut que le trapèze ait de portions (par exemple, ici en trois), puis ayant tiré à volonté une ligne droite de A en G, prolongez-la juſqu'à ce qu'elle rencontre la baſe en K. Cela fait, réduiſez le trapèze GKDE en un triangle GKL. Or comme ce trapèze ſurpaſſe le triangle GHI (qui eſt le tiers de toute la figure CE) de la valeur des deux petits triangles GHK & GIL, faites-en un autre qui les égale tous deux, & qui n'ait pour hauteur que la ligne tombant de

A à-plomb ſur la baſe CD, & portez la baſe de ce nouveau triangle de K en M; d'où vous tirerez une ligne droite en A, afin d'avoir le petit pentagone GAMDE pour un tiers de la figure à partager. Enſuite abaiſſez le triangle GHI à la hauteur de la perpendiculaire tombant de A ſur CD, & portez la baſe de ce nouveau triangle de M en N ſur la baſe prolongée. Si vous tirez la ligne AN, vous aurez le triangle ANM pour tiers de la même figure à partager. Mais comme il faut faire rentrer le triangle NCO dans la même figure, il n'y a qu'à mener NP parallèle à la ligne CA, laquelle coupera un côté en P. Si on tire la ligne PA, on aura le trapèze APCM pour le véritable ſecond tiers, & le trapèze PG pour le troiſième.

202. PROBLÊME III. *Diviſer un polygone de tant de côtés & ſi irrégulier qu'on voudra, en pluſieurs parties*

égales par des lignes partant d'un point donné à volonté?

1°. Supposons qu'il faille diviser un champ formant un pentagone irrégulier ABCDE [*Fig.* 70] entre quatre cohéritiers, à la condition de leur donner à tous un libre accès à un puits placé au sommet d'un des angles B. Réduisez ce polygone en un triangle BCF, dont vous diviserez la base en quatre parties égales aux points G, H, I, & tirez une ligne droite de B en G, vous aurez le triangle BCG pour le quart du pentagone, parce qu'il l'est du triangle BCF. Cela fait, tirez la ligne BH qui donnera le triangle BGH pour un quart du même pentagone. Mais comme le triangle LDH se trouve hors la figure, faites-l'y rentrer, ce qui est facile en tirant HK parallèle à DB. Car menant la ligne BK, on aura le trapèze BGDK pour le second quart; enfin réduisez le trapèze BKEA

en un triangle, dont vous diviſerez la baſe KM en deux également en N. Si vous tirez la ligne BN, vous aurez le triangle BKN pour le troiſième quart, & le trapèze BNEA ſera le quatrième.

2°. Si le puits étoit placé ſur l'un des côtés, comme en G [*Fig.* 71], d'un hexagone irrégulier, on réduiroit premièrement ce polygone en un triangle AHI, & on diviſeroit la baſe HI en autant de parties égales qu'on voudroit avoir de portions (par exemple, ici en 5) en K, L, M, N. Cela fait, baiſſez le triangle AHK, qui eſt la cinquième partie du triangle total, & par conſéquent du polygone à diviſer, à la hauteur de la ligne tombant à-plomb de G ſur HI, ce triangle deviendra le triangle marqué GKO dans la figure ſéparée. Si vous portez la baſe KO de C en O dans la grande figure, & que vous tiriez la ligne GO, vous aurez

le triangle GCO pour la cinquième partie du polygone irrégulier.

En ſecond lieu, faites la ligne OP égale à CO, & tirez la ligne GP, afin d'avoir le triangle GOP qui ſeroit auſſi un cinquième du polygone. Mais il faut faire rentrer le triangle RDP dans la figure, en tirant PS parallèle à GD. Si on mène la ligne GS, on aura le trapèze GODS pour le ſecond cinquième.

De plus, faites, en prolongeant DE, le triangle GST égal au reſte du polygone, & diviſez-en la baſe ST en trois parties égales, portions qui reſtent à trouver. Si vous tirez une ligne de G en V, qui eſt l'un des points de diviſion, vous aurez le triangle GSV pour un des cinquièmes.

En quatrième lieu, tirez une ligne de G en X, & faites rentrer le triangle ZEX, en tirant XY parallèle à GE. Menant alors une ligne de G en Y, on

aura un trapèze qui ſera encore un cinquième de toute la figure. De ſorte que le petit pentagone reſtant ſera le dernier cinquième de l'hexagone total.

3°. Enfin, ſi le puits étoit placé dans le polygone [*Fig.* 72], comme, par exemple, en G, & qu'on voulût diviſer la figure en quatre parties égales par des lignes partant de ce puits.

Il faudroit réduire ce polygone en un triangle AHI, dont on diviſera la baſe en quatre également aux points K, L, M, & abaiſſer le triangle AHK (qui eſt le quart du total AHI égal au polygone) à la hauteur de la ligne tombant du puits G ſur la baſe CD, ainſi qu'on le verra en faiſant, comme ci-deſſus, des figures ſéparées: puis on portera la baſe de ce nouveau triangle de C en N dans la grande figure, & l'on tirera la ligne GN afin d'avoir le triangle GCN pour le premier quart du polygone; cela fait, portez la ligne

CN de N en O, & tirez la ligne GO pour avoir un triangle, lequel ſeroit auſſi un quart du polygone. Mais comme il en ſort de la valeur d'un triangle, faites-l'y rentrer en menant OR parallèle à GD, & tirant GR pour avoir un trapèze NR, qui eſt le quart de la figure à diviſer. De plus, continuez la ligne DE, & faites le triangle GSR égal au triangle AHK, en abaiſſant ce dernier à la hauteur de l'autre, puis faites rentrer le triangle VES comme il a été dit pluſieurs fois. Si vous tirez la ligne GX, vous aurez la figure XGREF pour un quart de polygone, & le reſte ſera le quatrième & dernier quart.

203. *Remarque.* Le calcul abrége toutes ces opérations. Veut-on, par exemple, élever le triangle BAC [*Fig.* 62] dont on connoît la ſurface de 370 pieds quarrés, à la hauteur DE de 48 pieds, ſans changer la

quantité de ſa ſurface. On diviſe le nombre 370 par 48 pour avoir le double de la baſe du triangle demandé ; c'eſt ici environ $7\frac{7}{10}$. La baſe eſt donc de $3\frac{17}{20}$.

On agira d'une manière inverſe pour abaiſſer le triangle FGC à la hauteur du triangle BAC.

Du toiſé des ſurfaces.

On entend par *toiſé* des ſurfaces, la méthode de faire les multiplications néceſſaires pour évaluer les ſurfaces, lorſqu'on a meſuré les dimenſions en toiſes.

Il y a deux manières d'évaluer les ſurfaces en toiſes quarrées & parties de la toiſe quarrée.

204. Dans la première, on compte par toiſes quarrées, pieds quarrés, pouces quarrés, lignes quarrées, &c.

La toiſe quarrée contient 36 pieds quarrés, parce que c'eſt un rectangle

qui a 6 pieds de long ſur 6 pieds de large.

Le pied quarré contient 144 pouces quarrés, parce que c'eſt un rectangle qui a 12 pouces de long ſur 12 pouces de large ; par une raiſon ſemblable on voit que le pouce quarré vaut 144 lignes quarrées, &c.

Ainſi pour évaluer une ſurface en toiſes quarrées & parties quarrées de la toiſe quarrée, il n'y a autre choſe à faire qu'à réduire les deux dimenſions qu'on doit multiplier, chacune à la plus petite eſpèce, (en lignes, ſi la plus petite eſpèce eſt des lignes) ; & après avoir fait la multiplication, on réduira le produit en pouces quarrés, enſuite en pieds quarrés, & enfin en toiſes quarrées, en diviſant ſucceſſivement par 144, 144, & 36. Par exemple, pour trouver la ſurface d'un rectangle qui auroit $2^{T.}\ 3^{P.}\ 5^{P.}$ de long, & $0^{T.}\ 4^{P.}\ 6^{P.}$ de large, je réduis ces deux dimen-

ſions en pouces, & j'ai 185$^{P.}$ à multiplier par 54$^{P.}$, ce qui me donne 9990 pouces quarrés, & s'écrit ainſi 9990$^{PP.}$; pour les réduire en pieds quarrés, je diviſe par 144 ; j'ai 69 pieds quarrés & 54$^{PP.}$ de reſte, c'eſt-à-dire, 69$^{PP.}$ 54$^{PP.}$; pour réduire les 69$^{PP.}$ en toiſes quarrées, je diviſe par 36 ; j'ai une toiſe quarrée ou 1$^{TT.}$ pour quotient, & 33$^{PP.}$ de reſte ; en ſorte que la ſurface cherchée eſt de 1$^{TT.}$ 33$^{PP.}$ 54$^{PP.}$

205. Dans la ſeconde manière d'évaluer les ſurfaces en toiſes quarrées & parties de la toiſe quarrée, on conçoit la toiſe quarrée compoſée de ſix rectangles qui ont tous une toiſe de haut & un pied de baſe, & que pour cette raiſon on nomme *toiſes-pieds* : on ſubdiviſe chaque toiſe-pied en 12 parties ou rectangles, qui ont chacun une toiſe de haut & un pouce de baſe, & qu'on appelle *toiſes-pouces* ; on ſubdiviſe chacune de celles-ci en 12 parties qui

ont chacune une toiſe de haut & une ligne de baſe, & qu'on appelle *toiſes-lignes ;* en un mot, on ſe repréſente la toiſe diviſée continuellement en rectangles, qui ont conſtamment une toiſe de haut ſur un pied, ou un pouce, ou une ligne, ou un point de baſe. Les ſubdiviſions qui paſſent le point, ſe marquent comme les ſecondes, tierces, quartes, &c. pour les degrés, excepté qu'on en fait précéder la marque par un T, ſigne de la toiſe ; ainſi les marques ſucceſſives & les valeurs des ſubdiviſions de la toiſe quarrée, ſont telles qu'on les voit dans la Table ſuivante.

TABLE des ſubdiviſions de la Toiſe quarree, en rectangles d'une Toiſe de haut; & caractères qui repréſentent ces parties.

La toiſe quarrée vaut 6 toiſes-pieds, ou.....$6^{T.P.}$
La toiſe-pied vaut 12 toiſes-pouces, ou.....$12^{T.p.}$
La toiſe-pouce.....$12^{T.l.}$
La toiſe-ligne.....$12^{T.pt.}$
La toiſe-point.....$12^{T'}$
La T' ou *Toiſe-prime*.....$12^{T''}$
La T'' ou *Toiſe-ſeconde*.....$12^{T'''}$
La Toiſe-Tierce.....12^{TIV}

& ainſi de ſuite.

Quand on aura donc à multiplier les parties de deux lignes pour évaluer une ſurface, il faut concevoir que les toiſes du multiplicande ſont des toiſes quarrées ; les pieds, des toiſes-pieds ; les pouces des toiſes-pouces, & ainſi de ſuite ; à l'égard du multiplicateur, il repréſentera toujours combien de fois on doit prendre le multiplicande. Par exemple, ſi ayant à meſurer la ſurface du rectangle ABCD [*Fig.* 73], je trouve le côté AD de $4^T\ 4^P\ 6^P$, & le côté AB de $2^T\ 3^P$; je vois que ſi AE repréſente une toiſe, la ſurface ABCD eſt compoſée de deux rectangles qui ont chacun une toiſe de haut ſur $4^T\ 4^P\ 6^P$ de long, & d'un rectangle qui a 3^P ou une demi-toiſe de haut ſur $4^T\ 3^P\ 6^P$ de long, & qui par conſéquent eſt la moitié de l'un des deux autres ; de ſorte que je vois qu'il s'agit de répéter 2 fois $\frac{1}{2}$ un rectangle de 1^T de haut ſur $4^T\ 3^P\ 6^P$ de long, c'eſt-à-dire, de répé-

ter 2 fois $\frac{1}{2}$ la quantité $4^{TT}\ 4^{TP}\ 6^{TP}$. Ceci prouve ce que nous avons dit dans l'Arithmétique ſur la nature des unités du produit & de ſes facteurs dans la multiplication géométrique.

On voit en même-tems qu'il n'y a ici aucune nouvelle régle à apprendre pour faire ces ſortes de multiplications qui ſont évidemment les mêmes que celles que nous avons données en Arithmétique ſous le nom de *Multiplication des nombres complexes*.

Ainſi, pour nous borner à un exemple, ſi on me demande quelle eſt la ſurface d'un rectangle qui auroit $52^{T}\ 4^{P}\ 5^{P}$ de long, & $44^{T}\ 4^{P}\ 8^{P}$ de large; je fais l'opération comme il ſuit:

52T	4P	5P			
44T	4P	8P			
208TT	0TP	0TP	0T.l.	0T.pt.	
208					
22					
7	2				
2	2	8			
0	3	8			
26	2	2	6		
8	4	8	10		
2	5	6	11	4	
2	5	6	11	4	
2361TT	2T.P	5T.P	2T.l.	8T.pt.	

c'eſt-à-dire, je multiplie 52 par 44, puis les 4P du multiplicande par 44, en prenant pour 3P la moitié de 44, & pour 1P le tiers de ce que j'aurai eu pour 3P; enſuite je multiplie 5P par 44, en prenant pour 4P le tiers de ce que j'ai eu pour 1P; & pour 1P je prends le quart de ce que j'ai eu pour 4P.

Pour multiplier par 4^{P}, je prends pour 3^{P} la moitié du multiplicande total, & pour 1^{P} le tiers de ce que j'ai eu pour 3^{P}. Enfin, pour multiplier par $8^{P.}$, je prends le tiers de ce que j'ai eu pour 1^{P}, & je l'écris deux fois, réuniſſant tous ces produits particuliers, j'ai $2361^{TT.}$ $2^{T.P.}$ $5^{T.p.}$ $2^{T.l.}$ $8^{T.pt.}$ pour produit total.

Quand on a ainſi évalué une ſurface en toiſes quarrées, toiſes-pieds, toiſes-pouces, &c. il eſt fort aiſé d'en trouver la valeur en toiſes quarrées, pieds quarrés, pouces quarrés, &c. Il faut écrire alternativement les deux nombres 6 & $\frac{1}{2}$ ſous les parties de la toiſe, à commencer des toiſes-pieds, comme on le voit ci-deſſous; multiplier chaque partie par le nombre inférieur qui lui répond, & porter les produits des deux nombres conſécutifs 6 & $\frac{1}{2}$ dans une même colonne; lorſqu'en multipliant par $\frac{1}{2}$ il reſtera 1, écrivez 72 à côté ſur la

droite, pour commencer une ſeconde colonne. Ainſi, pour réduire en toiſes quarrées, pieds quarrés, pouces quarrés, &c. les parties du produit que nous avons trouvés ci-deſſus, j'écris

2361^{TT}	2^{TP}	5^{Tp}	2^{Tl}	8^{Tpt}
	6	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2}$
2361^{TT}	12^{PP}	72^{PP}		
	2	12		
		4		
2361^{TT}	14^{PP}	88^{PP}		

Et je multiplie les toiſes-pieds par 6, parce que la toiſe-pied vaut 6 pieds quarrés, ayant 6 pieds de haut ſur un pied de baſe. Je multiplie les toiſes-pouces par $\frac{1}{2}$, & je porte les deux entiers que me donne cette multiplication, au rang des pieds quarrés, parce que la toiſe-pouce étant la douzième partie de la toiſe-pied, doit valoir la douzième

partie de 6 pieds quarrés, c'eſt-à-dire, un demi-pied quarré ; donc les 5 toiſes-pouces valent 2 pieds quarrés & demi ; comme le demi-pied quarré vaut 72 pouces quarrés, au lieu du demi, j'écris 72 ; enſuite pour réduire les toiſes-lignes, je les multiplie par 6, parce que la toiſe-ligne étant la douzième partie de la toiſe-pouce, doit valoir la douzième partie de 72 pouces quarrés, c'eſt-à-dire, 6 pouces quarrés ; un raiſonnement ſemblable prouve qu'on doit multiplier enſuite par $\frac{1}{2}$, puis par 6, &c. ainſi que nous venons de le dire.

206. De même qu'on eſt dans l'uſage de dire qu'on multiplie une ligne par une ligne, on eſt auſſi dans l'uſage de dire qu'on diviſe une ſurface par une ligne. Cette expreſſion ne doit pas être priſe au pied de la lettre. La diviſion d'une ſurface par une ligne, n'eſt pas moins chimérique que la multiplication d'une ligne par une ligne. On ne peut

avoir qu'une ſurface à diviſer par une ſurface, ou une ſurface à diviſer par un nombre. Dans le premier cas, c'eſt chercher combien une ſurface contient une autre ſurface ; dans le ſecond cas, c'eſt partager une ſurface en parties égales. Le cas où l'on propoſe ordinairement de diviſer une ſurface par une ligne, c'eſt lorſque connoiſſant, par exemple, la ſurface d'un rectangle & l'un de ſes côtés, l'on veut connoître l'autre côté ; on dit alors qu'il faut diviſer la ſurface par le côté connu ; parce que, dit-on, comme la ſurface de ce rectangle eſt le produit des deux côtés contigus, ſi on la diviſe par l'un des côtés, on doit avoir pour quotient l'autre côté. On peut admettre cette façon de s'exprimer, mais comme manière abrégée ; ce qu'on diviſe réellement, c'eſt le *nombre* des parties de la ſurface, & non les *parties* de la ſurface ; & le diviſeur eſt le *nombre* des parties d'un côté, &

non les *parties* mêmes de ce côté, en ſorte que le quotient qu'on trouve exprime combien de parties contient le ſecond côté. Au reſte, la diſtinction que nous faiſons ici, n'introduit aucune différence dans la manière de faire l'opération. Lorſqu'on ſe propoſera de diviſer une ſurface par une de ces dimenſions, pour connoître l'autre, on ſe conduira comme il a été dit à la *Diviſion complexe*.

LIVRE TROISIÈME.

DES SOLIDES.

Notions générales ſur les Solides, & propriétés particulières du Priſme.

207. *DÉFINITIONS. I.* NOUS avons dit que par *ſolide* ou *volume*, on entend en Géométrie, l'*étendue* ou la *grandeur* conſidérée avec ſes trois dimenſions, *longueur*, *largeur* & *profondeur*. Une figure ſolide n'eſt donc autre choſe qu'un *eſpace* terminé en tout ſens, ou une *étendue* dans laquelle ces trois dimenſions ſont limitées. Or les limites qui terminent une étendue de tout côté, ne peuvent être que des ſurfaces; & c'eſt d'après le nombre & l'eſpèce de ces ſurfaces que le ſolide prend différens noms. On lui donne en général celui de *polyèdre* (formé des mots grecs

à pluſieurs baſes), quand il n'eſt terminé que par des ſurfaces planes, ou par des plans. S'il n'y a que quatre plans ou quatre faces qui le terminent (& il ne ſauroit y en avoir moins), on l'appelle (à quatre baſes) *tétraëdre*; de ſorte que le tétraëdre eſt le plus ſimple de tous les ſolides s'il eſt terminé par 5, 6, 7, 8, &c. plans, on l'appelle (à 5 baſes, &c.) *pentaëdre*, *hexaëdre*, *eptaëdre*, *octaëdre*, &c.

II. Un polyèdre eſt *régulier* lorſque les plans qui le terminent ſont des polygones *réguliers*, *égaux & ſemblables*; & ſi une de ces conditions manque, il eſt *irrégulier*.

III. Deux ſolides ſont *ſemblables* lorſqu'ils ſont terminés par un égal nombre de plans ſemblables.

IV. Le *priſme* eſt un polyèdre terminé par des plans, diſpoſés de manière que les deux oppoſés, comme [*Fig.* 92] ABCDE, FGHIK, ſont des poly-

gones égaux, ſemblables & parallèles; & que tous les autres, comme ABGF, BCHG, &c. ſont des parallélogrammes.

V. Les *baſes* du priſme ſont les deux faces oppoſées & parallèles ABCDE, FGHIK, que nous avons dit être toujours égales & ſemblables. Les *arêtes* ſont les droites parallèles & égales AF, BG, CH, &c. qui forment la commune ſection de deux faces contigues. La hauteur du priſme eſt une perpendiculaire abaiſſée d'une de ſes baſes ſur l'autre (quelquefois on prend pour baſe du priſme la face ſur laquelle le ſolide eſt cenſé appuyé, & alors ſa hauteur eſt une perpendiculaire abaiſſée du point le plus élevé du ſolide ſur cette face); & ſuivant que cette perpendiculaire eſt ou n'eſt pas parallèle, & par conſéquent égale à chacune des arêtes, le priſme eſt *droit* ou *oblique*.

VI. Le *parallélipipède* eſt un priſme à ſix faces parallèles deux à deux, &

formant ainſi des parallélogrammes égaux & ſemblables. Si tous les plans ou toutes les faces qui terminent ce ſolide ſont rectangles, il eſt appelé *parallélipipède rectangle*; & ſi outre cela les côtés de ces plans ſont tous égaux, alors ils forment des quarrés, & le ſolide devient un cube. On lui donne en particulier le nom de *pied cube*, de *toiſe cube*, &c. ſuivant que chacune de ſes faces eſt un pied quarré, une toiſe quarrée, &c.

VII. Il y a deux manières de concevoir la formation du priſme. La première conſiſte à ſe repréſenter des parallélogrammes AF, BG [*Fig.* 84], CH, DE, qui étant unis par leur longueur, aboutiſſent à deux plans parallèles ABCD, EFGH, leſquels ſeront les baſes du priſme.

VIII. La ſeconde manière ſe réduit à imaginer un polygone quelconque EFGH, qui ſe mouvant parallèle-

ment à lui-même le long d'une droite EA (qu'on appelle pour cette raiſon la *directrice du mouvement*) décrit un eſpace ſolide qui eſt néceſſairement un priſme. Si le plan générateur ABCD eſt un cercle, le priſme [*Fig.* 85] prend le nom de *cylindre*; & comme alors chaque baſe a un centre, on peut joindre ces centres par une ligne droite, laquelle eſt appelée l'*axe* du cylindre. Ce ſolide eſt *droit* ou *oblique*, ſuivant que ſon axe eſt perpendiculaire ou oblique à ſes baſes. Quand le cylindre eſt droit, on peut concevoir qu'il a été formé par le mouvement circulaire d'un rectangle ABCD [*Fig.* 86], qui a fait une révolution entière ſur un de ſes côtés immobiles AB. Alors la droite CD décrit la ſurface convexe du cylindre, & les droites AD, BC, ainſi que des rayons de cercle, décrivent les baſes du cylindre.

Remarque. Nous invitons nos Lec-

teurs à faire avec des cartes ou du carton tous les ſolides figurés dans nos *planches*.

DEMANDE. *Nous demandons qu'on nous accorde que deux ſolides ſont égaux & ſemblables, lorſqu'ils ſont terminés par un même nombre de plans égaux & ſemblables.*

La vérité de cette demande ne ſauroit être conteſtée; puiſque dans ce cas les angles d'un de ces ſolides étant néceſſairement égaux à ceux de l'autre, les deux ſolides n'ont rien qui puiſſe établir une différence quelconque entr'eux. Ils peuvent donc être ſuppoſés, & ils ſont non-ſeulement ſemblables, mais encore égaux en tout.

208. THÉORÊME I. *Le parallélipipède droit* EFGHIKLM *& le parallélipipède oblique* ABCDEFGH, *de même baſe & de même hauteur, ſont égaux en ſolidité* [*Fig.* 87].

Les priſmes triangulaires AIEBKF,

DMHCLG ſont égaux, puiſqu'ils ſont terminés par des ſurfaces égales; donc ſi l'on retranche de chacun la partie commune DINCKO, les reſtes ſeront égaux; or, ces reſtes étant ajoutés au priſme ENHFOG forment d'un côté le parallélipipède droit, & de l'autre l'oblique. Donc, &c.

209. COROLLAIRE. Il ſuit de-là, 1°. *que ſans changer ſa ſolidité, un parallélipipède oblique peut être réduit à un parallélipipède droit de même baſe & de même hauteur;* & qu'ainſi on peut rendre ſes faces perpendiculaires à ſes baſes, & par conſéquent rectangulaires. 2°. *Que les baſes elles-mêmes peuvent être réduites en rectangles*, puiſqu'on peut toujours les conſidérer comme deux faces du ſolide.

210. THÉORÊME II. *Quel que ſoit le parallélipipède* ABCDEFGH, *droit ou oblique, les priſmes triangulaires* ADCEHG, ABCEFG *en ſeront les moitiés* [*Fig.* 84].

DEMANDE. Les deux lignes AE, CG étant parallèles (212), on voit d'abord qu'un même plan peut passer par les quatre points A, C, G, E, & devenir la section commune des deux prismes triangulaires. Or ces deux prismes sont égaux. Donc chacun sera la moitié du parallélipipède proposé ABCDEFGH.

211. COROLLAIRE. Il suit de-là *que deux prismes triangulaires, l'un droit & l'autre oblique, de même base & de même hauteur, sont égaux*; car ils sont chacun les moitiés de deux parallélipipèdes égaux.

212. THÉORÊME III. *Deux prismes triangulaires droits, de hauteur égale, sont entr'eux comme leurs bases.* Désignant ces solides par P & p, leurs bases par B & b, on a P : p :: B : b.

DÉM. 1°. Si ces bases sont commensurables, supposons-les divisées en parties égales à leur commune mesure : que la première contienne un nombre N de

ces parties, tandis que la ſeconde en contient un nombre n; ce qui donnera $B : b :: N : n$; que ſur chacune de ces parties égales on élève des priſmes droits de même hauteur que P ou p: alors ces petits priſmes ſeront égaux de part & d'autre, & par conſéquent leurs ſommes ſeront entr'elles $:: N : n$; or, les ſolidités P & p ſont comme ces ſommes; donc 1°. on aura $P : p :: N : n :: B : b$.

2°. Si les baſes que je ſuppoſe repréſentées par les triangles [*Fig.* 88] ABC, DEF, ſont incommenſurables, je dis qu'on aura la même proportion. Car ſi cela n'étoit pas ainſi, ſuppoſons que ABH étant plus grand que ABC, on eût $P : p :: ABH : DEF$; prenons ſur DEF une aliquote plus petite que ACH, & ſuppoſons que ACG eſt ce qu'il faut ajouter à la baſe ABC, pour pouvoir la meſurer par cette partie aliquote: dans ce cas ABG <

ABH, & de plus elle eſt commenſurable avec DEF. Déſignant donc par Q le priſme droit, élevé ſur ABG, par P celui qui eſt élevé ſur ABC, & par *p* celui qui eſt élevé ſur DEF, on aura par la première partie du théorême Q : *p* :: ABG : DEF, tandis que l'on a par ſuppoſition P : *p* :: ABH : DEF. Or, ABH > ABG. Donc P > Q, ou bien la partie eſt plus grande que le tout; ce qui eſt abſurde. Donc, &c.

213. COROLLAIRE I. *Deux priſmes triangulaires obliques, ou l'un droit & l'autre oblique, de hauteur égale, ſont entr'eux comme leurs baſes.* Car les priſmes triangulaires & obliques valant des priſmes triangulaires droits, de même baſe & même hauteur (215), les uns doivent ſuivre le même rapport que les autres.

214. COROLLAIRE II. *Des priſmes de hauteur égale, ſoit droits, ſoit*

obliques, ou bien l'un droit & l'autre oblique, qui ont pour baſes des polygones quelconques, ſont entr'eux comme ces baſes. Car ſi ces polygones ont un égal nombre de côtés comme ABCDE & *abcde* [*Fig.* 89], qu'on déſigne par P le premier priſme, & par *p* le ſecond : par P', P'', P''' les priſmes conſtruits ſur les triangles ABC, ACD, ADE, & par *p'*, *p''*, *p'''* les priſmes élevés ſur les triangles *abc*, *acd*, *ade*, on aura (212), P' : P'' : P''' :: ABC : ACD : ADE. Donc P : P' :: ABCDE : ABC. De même *p* : *p''* :: *abcde* : *abc*. Or (212), P' : *p'* :: ABC : *abc*. Donc P : *p* :: ABCDE : *abcde*.

Si les baſes qu'on compare n'ont pas le même nombre de côtés, comme ABCDE, MNL, appelant Q le priſme élevé ſur la ſeconde, & gardant pour l'autre les dénominations ci-deſſus, on aura,

$p' : p'' : p''' : Q :: ABC : ACD : ADE : MNL$. Donc $P : Q :: ABCDE : MNL$.

De tout cela on conclura que *deux prismes quelconques de bases égales & de hauteur égale, sont égaux en solidité.*

215. *Remarque.* Le corollaire ainsi que le théorême précédent supposent qu'en comparant les solidités de deux prismes, on détermine leurs bases de la même manière dans chacun, c'est-à-dire, en prenant une des deux faces égales qui s'y trouvent toujours (212). Car si dans deux prismes triangulaires ABCDEF [*Fig.* 90], GHIKLM, on prenoit pour base du premier le parallélogramme ADFC; & pour base du second, le triangle GHI: & que de plus les hauteurs prises au-dessus de ces bases étant égales, le parallélogramme ADFC fût double du triangle GHI, les deux solides, loin d'être en raison de ces bases, seroient égaux en-

tr'eux. Car ſi à chacun on en ajoutoit un autre qui lui fût égal & ſemblable, ils deviendroient des parallélipipèdes à hauteurs égales & à baſes égales; puiſque l'une de ces baſes ſeroit ADFC, & l'autre GHI×2. Ces parallélipipèdes ſeroient donc égaux (214); & par conſéquent (210), les priſmes triangulaires ABCDEF, GHIKLM le ſeroient auſſi.

216. THÉORÊME IV. *Des priſmes droits de méme baſe ſont entr'eux comme leurs hauteurs*; ou appelant les priſmes droits ABCGHI, ABCDEF, le premier P, & le ſecond *p*, on aura P : *p* :: BH : BE [*Fig.* 91].

DÉM. 1°. Si les hauteurs BH & BE ſont des lignes commenſurables, ſuppoſons-les diviſées en parties égales, & que par chacune de ces diviſions on coupe ces deux priſmes parallèlement à la baſe commune ABC: dans ce cas les ſections termineront des priſmes égaux,

&

& le nombre de ceux qui ſeront dans P, ſera au nombre de ceux qui ſeront dans p :: BH : BE, ou l'on aura P : p :: BH : BE.

2°. Si l'on n'avoit pas la même proportion lorſque BH & BE ſont incommenſurables, ſuppoſons qu'on eût P : p :: BN : BE, ajoutons à BH la partie HL, qui la rende commenſurable avec BE, par une aliquote plus petite que HN : appelons Q le priſme ABCKLM, qui auroit BL pour hauteur. Cela poſé, Q : p :: BL : BE. Tandis que par ſuppoſition P : p :: BN : BE. Or, BN > BL. Donc P > Q, ce qui eſt abſurde.

217. *Remarque.* Puiſqu'un priſme oblique vaut un priſme droit de baſe égale & de hauteur égale (214), il eſt aiſé de voir que l'analogie du théorême précédent s'étend à toute ſorte de priſmes.

218. Corollaire I. *Des priſmes quelconques* ABCDEF [*Fig.* 91] & ABCDEFI [*Fig.* 92], *qui ont des*

baſes égales, ſans être les mêmes, ſont entr'eux comme leurs hauteurs. Car ſi ſur la baſe ABC on éleve le priſme ABCKLM de même hauteur que ABCDEFI, il ſera égal à celui-ci (214). Or, le priſme ABCDEF eſt au priſme ABCKLM, comme la la hauteur BE eſt à la hauteur BL; donc, &c.

219. COROLLAIRE II. Puiſque des priſmes quelconques à hauteurs égales ſont comme leurs baſes (214), & que ceux qui ont des baſes égales ſont comme leurs hauteurs (218), on en conclura qu'ils ſont entr'eux en raiſon compoſée de leurs baſes & de leurs hauteurs, ou que déſignant le rapport de leurs baſes par celui des deux nombres B, b, le rapport de leurs hauteurs par celui des deux nombres H, h, & les deux priſmes par P & p, on aura toujours P : p :: BH : bh.

220. Il ſuit de-là, 1°. que ſi dans

deux prismes les bases sont en raison inverse des hauteurs, leurs solidités sont égales, & réciproquement. Car si B : b :: h : H, on aura BH = bh, & par conséquent P = p. Pareillement si P = p, BH = bh, ou bien B : b :: h : H.

221. 2°. *Que deux prismes semblables sont entr'eux en raison triplée, ou comme les cubes des deux nombres, dont le rapport exprime celui des dimensions homologues quelconques de ces solides.* Car toutes les faces de ces solides étant des figures planes semblables, leurs dimensions homologues sont proportionnelles aux hauteurs. Donc ici la raison des bases, ou bien B : b, est composée de deux raisons égales; & si on lui ajoute celle des hauteurs laquelle est H : h, on aura BH : bh, qui sera composé de trois raisons égales, & qui vaudra par conséquent la raison qu'il y a entre les cubes des

nombres qui ſont les termes d'une de ces raiſons, ou bien qui expriment le rapport de deux dimenſions homologues de ces ſolides.

222. 3°. Que ſi *p* eſt le priſme qu'on prend pour unité de meſure d'un autre priſme P, tandis que la baſe & la hauteur du premier ſont les unités de meſure pour la baſe & la hauteur du ſecond, la proportion ci-deſſus (219) deviendra P:I::BH:I. Ce qui ſignifie que *ſi l'on multiplie le nombre qui exprime combien de fois la baſe* B *d'un priſme quelconque, contient ſon unité de meſure, par celui qui exprime combien de fois la hauteur contient ſon unité; le produit indiquera combien de fois le priſme* P *contient celui qui lui ſert d'unité, ou bien il expoſera ſa valeur meſurée par cette unité*; ce qui s'énonce ordinairement d'une manière abrégée, en diſant, *que la ſolidité d'un priſme quelconque eſt exprimée par le*

produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur. (Il eſt inutile d'avertir que cette propoſition doit être priſe dans le ſens de ce qui la précède, & que cela ſuffit pour faire diſparoître l'abſurdité qu'elle ſemble préſenter d'abord, en diſant qu'il faut multiplier une ſurface par une ligne.)

223. *Remarque.* Il faut obſerver ici qu'on prend ordinairement le cube pour la meſure des ſolides, ainſi que dans les ſurfaces on ſe ſert du quarré. La raiſon de ce procédé eſt que le cube ayant ſes trois dimenſions égales, la même unité de longueur, ſavoir, l'arête du cube, ſert pour les trois dimenſions du ſolide; ce qui eſt plus ſimple que ſi chacune de ces dimenſions avoit ſa meſure particulière, comme il pourroit arriver ſi l'on prenoit un autre priſme pour unité.

D'après cela, ſi l'on veut ſavoir, par exemple, combien de pieds cubes ſont

contenus dans un prisme, on cherche d'abord le nombre des pieds quarrés qui sont contenus dans sa base, on le multiplie par le nombre qui exprime combien il a de pieds dans sa hauteur, & ce produit exprime le nombre de pieds cubes que contient le solide mesuré.

224. THÉORÊME V. *La surface latérale d'un prisme quelconque* ABCDEFI *droit ou oblique, est exprimée par le produit d'une de ses arêtes* AF *multipliée par le contour d'une section a b c d e faite dans ce prisme perpendiculairement à ses arêtes* [*Fig.* 92].

DÉM. Puisque toutes ces arêtes sont parallèles (208), si l'une est perpendiculaire au plan de la section, les autres le seront aussi; & par conséquent (187) les lignes *a b*, *b c*, *c d*, &c. qu'elles rencontreront sur ce plan, seront perpendiculaires à ces mêmes arêtes AF, BG, CH, &c. ou si celles-ci sont prises pour bases dans les parallélogram-

mes AG, BH, CI, &c. les autres en ſeront les hauteurs. Donc la ſurface latérale du priſme ſera $AF \times ab + BG \times bc + CH \times cd +$ &c. & comme AF, BG, CH ſont des lignes égales (208), on aura pour l'expreſſion de la ſurface, $AF \times ab + AF \times bc + AF \times cd +$ &c. ou $AF \times (ab + bc + cd +$ &c.), c'eſt-à-dire, le produit d'une arête par le contour d'une ſection perpendiculaire.

N. B. On ſuppoſe le priſme droit.

225. *Remarque.* Puiſque les baſes d'un même priſme ſont des polygones égaux, ayant meſuré l'une par les méthodes données, on connoît l'autre; & alors pour avoir la ſurface entière du ſolide, il faut ajouter ſa ſurface latérale à celle de ſes baſes.

226. Corollaire. Si le priſme eſt droit, la ſection perpendiculaire *abcde* ſera égale à ſa baſe, & chacune des arêtes vaudra la hauteur; donc alors *la*

ſurface latérale de ce ſolide ſera exprimée par le contour de la baſe multipliée ou par ſa hauteur, ou par une de ſes arêtes. On voit qu'il n'en ſauroit être de même dans les priſmes obliques, parce que dans ceux-là le contour de la ſection faite perpendiculairement à la longueur n'eſt pas égal à celui de la baſe.

227. *Remarque.* Il faut obſerver ici que le cylindre pouvant être conſidéré comme un priſme qui a pour baſe un polygone d'une infinité de côtés, tout ce que nous avons dit de l'un de ces ſolides, peut s'appliquer à l'autre; & comme celui-ci a toujours un axe qui détermine ſa longueur, on peut faire entrer l'expreſſion de cette ligne dans toutes les déterminations où nous avons employé celle de l'arête du priſme.

De la Pyramide.

228. DÉFINITIONS. *I. La pyramide eſt un polyèdre formé par la réunion de pluſieurs triangles* SOT, STR, SRQ, SQP, SPO *diſpoſés* [*Fig 93*] *de manière que leurs baſes forment le contour d'un polygone* OTRQP, *& que tous leurs ſommets aboutiſſent à un même point* S. Ce point eſt appelé le *ſommet* de la pyramide, tandis que le polygone OTRQP en eſt la *baſe*. Si cette baſe eſt un triangle, on a une pyramide *triangulaire* ou bien un *tétraëdre*; ſi elle eſt un quadrilatère, un pentagone, un hexagone, &c. la pyramide eſt appelée *quadrilatérale*, *pentagonale*, *hexagonale*, &c. (Le nom de la pyramide eſt dérivé du mot grec *feu*, parce qu'elle reſſemble à un rayon de flamme.)

229. *II.* Une pyramide eſt *régulière* quand elle a pour baſe un polygone ré-

gulier, & qu'en outre toutes ſes faces ſont des triangles iſoſcèles & égaux; elle eſt *irrégulière* quand une de ces conditions manque. L'apothème dans une pyramide régulière eſt la perpendiculaire SX qui meſure la hauteur d'une de ſes faces, & par conſéquent de toutes les autres. L'*axe* dans une pyramide qui a pour baſe un polygone quelconque ſymmétrique ou régulier, n'eſt autre choſe que la droite menée du ſommet au centre de ſa baſe; & ces pyramides ſont ou *droites* ou *obliques*, ſuivant que l'axe eſt ou n'eſt pas perpendiculaire au plan de leur baſe.

230. *III.* La *hauteur* d'une pyramide eſt la perpendiculaire abaiſſée du ſommet ſur le plan de ſa baſe.

231. *IV.* Si l'on ſuppoſe que le cercle PRQT eſt immobile [*Fig.* 94], & que la droite SP ayant un point fixe en S au-deſſus de ce cercle, fait une révolution entière autour de ſa circonfé-

rence, on pourra concevoir un ſolide renfermé entre le plan circulaire PRQT, & la ſurface convexe décrite par cette droite ; ce ſolide ſera un *cône*. Il aura un *axe*, ſavoir, la droite SC menée du ſommet au centre de la *baſe*, ou du cercle PRQT ; & ſuivant que cet axe ſera perpendiculaire, ou oblique au plan de la baſe, ou ſuivant que la mobile SP fera toujours le même angle ou des angles variables avec ce plan, le cône ſera *droit* ou *oblique*. C'eſt pourquoi on peut ſe repréſenter le cône droit, comme un ſolide formé par la révolution d'un triangle rectangle SCP, qui, reſtant toujours perpendiculaire ſur le même plan, feroit une révolution entière ſur le côté immobile SC.

[*N. B.* La perſpective oblige de repréſenter ovale le cercle PRQT de la figure 94.]

232. THÉORÊME I. *Si une pyramide eſt coupée par des plans paral-*

lèles à ſa baſe, les différentes ſections formeront des figures ſemblables à la baſe, & par conſéquent ſemblables entr'elles; & ces ſections ſeront comme les quarrés de leurs diſtances au ſommet [*Fig. 95*].

Dém. Dans la même pyramide les deux ſections ABCD, *abcd*, ne ſont autre choſe que des figures deſſinées ſur des plans parallèles par des lignes droites SA, SB, SC, &c. menées du même point S. Elles ſont donc ſemblables (193); & leurs ſurfaces ſont comme les quarrés de leurs diſtances au ſommet S de la pyramide (198).

233. Corollaire. On conclura de-là *que ſi deux pyramides* ABCDS, DEFS [*Fig. 95, 96*] *de même hauteur & de différentes baſes, ſont coupées parallèlement à ces baſes à même diſtance du ſommet, les deux ſections abcd*, ABC, *ſeront entr'elles comme les baſes* ABCD, DEF. Car appe-

lant dans chaque pyramide ſa hauteur H, & la diſtance de la ſection au ſommet *h*, l'on aura d'un côté ABCD : *abcd* :: $H^2 : h^2$; & de l'autre DEF : ABC :: $H^2 : h^2$. Donc ABCD : DEF :: *abcd* : ABC.

234. THÉORÊME II. *Si l'on coupe une pyramide triangulaire* DEFS, *par un plan* ABC *parallèle à la face oppoſée : 1°. la petite pyramide* ABCS *qui naîtra de-là ſera ſemblable à la grande. 2°. Si la ſection diviſe également les côtés de la grande pyramide aux points* A, B, C, *chaque face de la petite vaudra le quart de la face correſpondante de la grande* [*Fig. 96*].

DÉM. 1°. La face ABC eſt ſemblable à DEF (232) : en outre, la ligne AB étant parallèle à DE, ainſi que BC l'eſt à EF, & AC à DF (191), le triangle SAB eſt ſemblable au triangle SDE, le triangle SBC

eſt ſemblable à SEF, & SAC à SDF. Donc (208) la petite pyramide ABCS ſera ſemblable à la grande DEFS.

2°. Si les côtés SD, SE, SF ſont diviſés également aux points A, B, C, on aura $AB = \frac{1}{2}DE$, $BC = \frac{1}{2}EF$, $AC = \frac{1}{2}DF$. Donc $ABC = \frac{1}{4}DEF$, & pour la même raiſon $SAB = \frac{1}{4}SDE$, $SBC = \frac{1}{4}SEF$, & $SAC = \frac{1}{4}SDF$. Donc, &c.

235. COROLLAIRE. On conclura delà *que ſi dans une pyramide triangulaire* ABCD [*Fig.* 97] (on n'a point ombré cette pyramide, crainte de confuſion; & il nous a paru plus commode de prendre pour ſa baſe la face ABD, ce qui ſuppoſe le ſommet placé en C) *on fait deux ſections* HIK, HGE, *qui partagent également les côtés de la pyramide au point* H, I, K, G, E, *on en retranchera deux nouvelles pyramides* HLKC, AEGH, *ſemblables & égales entr'elles.* Sem-

blables, parce que chacune ſera ſemblable à la grande (234): &, égales, parce que les faces HIK & AEG valant chacune $\frac{1}{4}$ ABD (234), ſeront égales entr'elles; de même HIC & AEH valant chacune $\frac{1}{4}$ ABC, ſeront égales (il en eſt ainſi des autres faces). Et partant les deux pyramides HIKC, HGEA, étant terminées par un égal nombre de faces égales, ſeront elles-mêmes égales.

236. THÉORÊME III. *Toute pyramide triangulaire* ABDC *peut être décompoſée en deux pyramides* AEGH, HIKC, *égales ſemblables entr'elles & ſemblables à la grande, & en deux priſmes triangulaires égaux* BIFEHG, FDGIKH.

DÉM. Si les côtés de la pyramide ſont diviſés également aux points E, F, G, H, I, K; qu'on faſſe paſſer une ſection par les trois points I, H, K, & une autre par les trois points H, E,

G, on retranchera les deux pyramides HIKC, AEGH égales ſemblables entr'elles & ſemblables à la totale (235). Il s'agit donc de prouver que ce qui reſte de la pyramide totale, ſavoir, IKHBDGE, peut être décompoſé en deux priſmes triangulaires égaux.

Or, cela eſt ainſi; car les triangles HIK, GFD, ſont égaux, puiſque (234) chacun eſt le quart de ABD; ils ſont équiangles, puiſque chacun eſt ſemblable à ABD; donc leurs côtés homologues ſont égaux: en outre (195) HK eſt parallèle à GD, IK à FD, IH à EB, & par conſéquent à FG. Donc dans le ſolide IHKFGD les deux faces triangulaires ſont égales, & les côtés de l'une parallèles & égaux aux côtés correſpondans de l'autre; & par conſéquent les autres faces ſont des parallélogrammes, ce qui indique néceſſairement un priſme triangulaire: comme il en eſt de même des deux faces BIF, EHG, le ſolide

qui reſte, ſavoir, BIFEHG ſera également un priſme triangulaire. Or, en prenant pour baſe du premier le triangle GFD, & pour baſe du ſecond le parallélogramme BFGE, qui eſt une de ſes faces, ces ſolides ont même hauteur, & de plus la baſe de l'un eſt un parallélogramme double de la baſe triangulaire de l'autre, ils ſont donc égaux (215); & par conſéquent, &c.

237. *Remarque.* Il faut obſerver qu'en décompoſant une pyramide triangulaire, ainſi qu'il eſt indiqué dans le théorême précédent, une des deux pyramides égales HIKC a néceſſairement une face HIK commune avec un des deux priſmes égaux, ſavoir, avec FDGHIK; & qu'ainſi en prenant cette face pour baſe dans ces deux ſolides, & la face parallèle ABD pour baſe dans la pyramide totale, on peut dire (234) que *chacun de ces ſolides a une baſe ſous-quadruple de celle de la py-*

ramide dont ils ſont tirés. Et comme le plan HIK ne peut partager également les côtés AC, BC, DC de la grande pyramide, ſans diviſer ſa hauteur en deux parties égales, dont l'une meſure alors la hauteur de la pyramide HIKC, & l'autre celle du priſme FDGHIK, *chacune de ces hauteurs ſera la moitié de la pyramide totale.*

238. THÉORÊME IV. *Une pyramide triangulaire quelconque eſt le tiers d'un priſme de même baſe & de même hauteur.* C'eſt-à-dire, que ſi l'on déſigne par *b* la baſe de ce priſme, & par *h* ſa hauteur, ce qui donnera *bh* pour l'expreſſion de ſa ſolidité (222), on aura $\frac{1}{3}bh$ pour celle de la pyramide.

DÉM. Si l'on décompoſe la pyramide donnée & toutes celles qui naîtront de celles-là, ainſi qu'il eſt indiqué dans le théorême précédent, la première diviſion donnera deux priſmes égaux & deux pyramides égales ; la ſeconde, quatre

prismes égaux & quatre pyramides égales : la troisième huit prismes égaux & huit pyramides égales, & toujours de même. En outre, un des deux prismes & une des deux pyramides qui viennent de chaque décomposition, ont une hauteur sous-double & une base sous-quadruple de celle qu'a la pyramide dont ils sont tirés (237 & 234). Donc par la première division on aura un prisme & une pyramide qui auront chacun pour hauteur $\frac{1}{2}h$, & pour base $\frac{1}{4}b$. Donc le prisme (222) vaudra $\frac{1}{2}h \times \frac{1}{4}b$, ou $\frac{1}{8}bh$, & les deux prismes ensemble vaudront $\frac{1}{4}bh$.

Par la seconde division on aura quatre prismes égaux, dont un aura sa hauteur exprimée par $\frac{1}{4}h$, & sa base exprimée par $\frac{1}{16}b$. Donc la solidité sera exprimée par $\frac{1}{64}bh$, & celle des quatre ensemble par $\frac{1}{16}bh$.

Par la troisième division on aura huit prismes égaux, & un de ceux-là aura

ſa hauteur exprimée par $\frac{1}{8}h$ & ſa baſe par $\frac{1}{64}b$. Donc la ſolidité ſera $\frac{1}{512}bh$, & celle des huit enſemble, $\frac{1}{64}bh$. Et comme de pareilles diviſions peuvent être réitérées, juſqu'à ce que l'excès de la pyramide donnée ſur la ſomme de ces priſmes ſoit plus petit que toute quantité aſſignable, on pourra dire alors que cette pyramide vaut la ſomme de ces priſmes. Or, cette ſomme étant repréſentée par la progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini $\frac{1}{4}bh$, $\frac{1}{16}bh$, $\frac{1}{256}bh$... ou par $bh\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots\right)$ eſt $\frac{1}{3}bh$. Donc l'expreſſion de la ſolidité de la pyramide donnée ſera $\frac{1}{3}bh$; tandis que (222) celle de la ſolidité du priſme de même baſe & de même hauteur ſera bh; ou la première ſera le tiers de la ſeconde.

239. COROLLAIRE I. *Une pyramide* OPQRTS *qui a pour baſe un polygone* [*Fig.* 93] *quelconque, eſt donc le tiers du priſme de même baſe & de*

même hauteur : ou ſa ſolidité ſera exprimée dans tous les cas par le tiers du produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur. Les pyramides triangulaires OPTS, PTRS, PQRS, ſont chacune le tiers des priſmes triangulaires de même hauteur, élevés ſur leurs trois baſes (238). Donc la ſomme de ces trois pyramides, ou la pyramide totale, ſera le tiers de la ſomme de ces trois priſmes, ou du priſme total; & par conſéquent (222) ſa ſolidité ſera exprimée par le tiers du produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur.

240. COROLLAIRE II. Il ſuit de-là, 1°. que les pyramides qui ont des hauteurs égales & des baſes égales, ſont égales entr'elles, quelle que ſoit la forme de ces baſes. 2°. Que celles qui ont des baſes égales, ſont comme leurs hauteurs. 3°. Que celles qui ont des hauteurs égales, ſont comme leurs baſes. 4°. Que celles qui ont les baſes en raiſon inverſe

des hauteurs ſont égales, & réciproquement. 5°. Que celles qui ſont ſemblables, ſont entr'elles comme les cubes de leurs hauteurs ou de deux autres dimenſions homologues quelconques. Toutes ces conſéquences ſont fondées ſur ce que les pyramides ſont le tiers de priſmes de même baſe & de même hauteur, & que ceux-ci admettent entr'eux tous ces divers rapports.

241. SCHOLIE. Pour avoir la ſolidité d'une pyramide tronquée à baſes paralèles, il faudra la completter & ſouſtraire la ſolidité du complément de celle de la pyramide entière. Or, puiſqu'on connoît la baſe $abcd$ de ce complément $abcdS$, il ne s'agit [*Fig.* 95] que de trouver ſa hauteur, qu'on aura de cette manière, $AB : ab :: SH : Sh$. Donc $AB - ab : ab :: SH - Sh$ ou $Hh : Sh = \frac{ab \times Hh}{AB - ab}$. Connoiſſant Sh, en l'ajoutant à hH, on a SH; &

par conſéquent on a la ſolidité de la pyramide *abcd*S qui ſert de complément, ainſi que celle de la pyramide totale ABCDS. Donc en ſouſtrayant l'une de l'autre, on aura celle de la pyramide tronquée ABCD*abcd*.

242. THÉORÊME V. *La ſurface latérale d'une pyramide régulière eſt égale à la moitié du contour de ſa baſe multipliée par ſon apothème.*

DÉM. Cette ſurface eſt néceſſairement égale à la ſomme des triangles qui la compoſent. Or, dans la pyramide régulière l'apothème eſt la hauteur commune de tous ces triangles (229), & leurs baſes forment le contour de la baſe de la pyramide. Donc, &c.

243. *REMARQUES.* I. Si la pyramide régulière ABCDS étoit coupée à la moitié de ſa hauteur par un plan parallèle à ſa baſe, le contour *abcd* de cette nouvelle ſection ſeroit la moitié du contour de la baſe. On peut donc encore,

pour avoir la ſurface de la pyramide régulière, multiplier ſon apothème par le contour d'une ſection moyenne, faite parallèlement à ſa baſe.

II. Si la pyramide eſt irrégulière, on ne ſauroit meſurer ſa ſurface, ainſi qu'il eſt indiqué dans le théorême précédent; parce que les divers triangles qui forment ſes faces n'ont pas tous la même hauteur. Il faut donc alors pour eſtimer cette ſurface, prendre celle de chaque face triangulaire en particulier, & leur ſomme ſera la ſurface latérale de la pyramide.

244. THÉORÊME VI. *Si on coupe une pyramide régulière par un plan a b c d parallèle à ſa baſe, la ſurface latérale du tronc* A B C D *a b c d ſera égale au reſte de l'apothème* P *p multiplié, ou par la demi-ſomme des contours des deux baſes* A C, *a c, ou par le contour entier d'une ſection moyenne & parallèle à ces baſes.*

DÉM.

Dém. Chaque face de la pyramide tronquée comme Ab, Bc, &c. forme un trapèze ; puiſque AB & ab, BC & bc, &c. ſont parallèles (195) : en outre, le reſte de l'apothême, ſavoir Pp, meſure dans tous ces trapèzes la diſtance des deux côtés parallèles. Donc

le trapèze $Ab = Pp \times \frac{AB + ab}{2}$:

le trapèze $Bc = Pp \times \frac{BC + bc}{2}$,

& ainſi des autres : d'ailleurs à la place de la demi-ſomme des côtés parallèles de ces trapèzes, on pourroit prendre les droites moyennes & parallèles à ces côtés (167), leſquelles forment le contour d'une ſection moyenne & parallèle. Donc la ſomme de ces trapèzes, ou la ſurface latérale du tronc, pourra être exprimée indifféremment, ou par la demi-ſomme des contours des deux baſes multipliées par l'apothème, ou par le con-

tour entier de la ſection moyenne & parallèle, multipliée par cet apothème.

245. *Remarque.* Puiſque le cône peut être conſidéré comme une pyramide qui a une infinité de faces, ou qui a pour baſe un polygone régulier d'une infinité de côtés, & que d'ailleurs ce que nous avons dit de la pyramide en général eſt indépendant du nombre des côtés de ſa baſe, il s'enſuit que tout cela peut s'appliquer au cône, & que les mêmes rapports que nous avons trouvés plus haut, ſoit en comparant les pyramides entr'elles, ſoit en les comparant aux priſmes, ſe trouveront auſſi en comparant les cônes entr'eux, ou bien en les rapportant à des cylindres.

De la Sphère.

246. *Définitions. I. La ſphère eſt un ſolide dans lequel tous les points de la ſurface ſont à égale diſtance*

d'un point pris en-dedans, qui eſt le centre du ſolide. Toute ligne droite qui traverſe la ſphère en paſſant par le centre, en eſt un *diamètre* ou un *axe*; & la moitié de cette ligne qui meſure la diſtance du centre à la ſurface en eſt un *rayon.*

247. *II.* Pour ſe repréſenter la formation de ce ſolide, il faut concevoir un demi-cercle ABDC [*Fig.* 98] qui paſſe par une révolution entière ſur ſon diamètre immobile AD. Dans ce mouvement la demi-circonférence ABD décrira une ſurface convexe, dont tous les points ſeront à égale diſtance du centre C, & qui par conſéquent terminera une ſphère; & toutes les lignes comme EF, BC, menées de la demi-circonférence perpendiculairement à ſon diamètre AD, décriront dans cette révolution des cercles.

248. *III.* On diſtingue dans la ſphère *des grands & des petits cercles.* Les

premiers ont pour centre le centre même de la ſphère ; & les autres ont leur centre dans un autre point de ce ſolide. D'où il ſuit que les grands cercles de la ſphère ont tous un diamètre commun, puiſqu'ils ont le même centre, & qu'ainſi ils ſont égaux ; mais qu'il n'en eſt pas de même des petits cercles.

249. *IV.* Si un plan paſſe par le centre de la ſphère, il la partage en deux parties égales, & chacune eſt appelée un *hémiſphère.* S'il paſſe hors du centre, il la partage en deux parties inégales, dont la petite eſt appelée une *calotte ſphérique ;* & enfin ſi deux plans parallèles coupent ce ſolide, la partie qu'ils interceptent entr'eux s'appelle une *zone*, ou *ceinture.*

250. *V.* Nous appelons *ſphéroïde* le ſolide engendré par la révolution d'un demi-polygone régulier & ſymmétrique ADEFGB, qui tourne ſur un diamètre AB, mené d'un angle à l'angle

opposé de ce polygone [*Fig.* 99].

251. THÉORÊME I. *Si un demi-polygone régulier & symmétrique fait une révolution entière sur un diamètre* AB *mené d'un angle à l'angle opposé, il décrira un sphéroïde, dont la surface sera exprimée par le produit de l'axe* AB, *multiplié par la circonférence du cercle inscrit dans le polygone.*

DÉM. Dans cette révolution les côtés contigus à l'axe, comme AD, BG, décriront des surfaces de cônes entiers, les côtés obliques à cet axe, comme DE, GF, décriront des surfaces de cônes tronqués, & enfin les côtés qui lui seront parallèles, comme EF, décriront des surfaces cylindriques. Or, chacune de ces surfaces doit être exprimée par le produit de la portion de l'axe qu'elle renferme, multipliée par la circonférence du cercle inscrit.

1°. Du point X, qui est le milieu du

côté AD, ſoient tiré le rayon XC & la ligne Xx perpendiculaire à AB & parallèle à DL. Les triangles ADL, XCx, ſeront ſemblables. Donc AL : AD :: Xx : XC; ou les circonférences étant comme les rayons, AL : AD :: circ. Xx : circ. XC. Donc AL × circ. XC = AD × circ. Xx. Or, AD × circ. Xx = la ſurface conique décrite par AD (242). Donc cette ſurface = AL × circ. XC.

2°. Du point H, pris au milieu de ED, tirez auſſi le rayon HC, & la ligne HI perpendiculaire à AB & parallèle à EM. Les triangles ſemblables DEK, HCI donneront, DK ou LM : DE :: HI :: HC; ou bien LM : DE :: circ. HI : circ. HC. Donc LM × circ. HC = DE × circ. HI. Or, la ſurface du cône tronqué décrit par le côté DE, eſt exprimée par DE × circ. HI (243); donc elle le ſera auſſi par LM × circ. HC.

3°. La ſurface cylindrique décrite par EF parallèle à l'axe, eſt déterminée, ſuivant ce que nous avons vu (226), par EF×circ. FR; ou ce qui eſt le même, par MR×circ. PC. De ſorte que la ſurface de chacun des ſolides qui compoſent le ſphéroïde, ſera exprimée par la portion de l'axe qu'ils renferment, multipliée par la circonférence du cercle inſcrit dans le polygone, & par conſéquent *la ſurface totale du ſphéroïde aura pour expreſſion le produit de l'axe entier multiplié par la circonférence de ce cercle inſcrit.*

252. COROLLAIRE. Si le polygone régulier a une infinité de côtés, il pourra être confondu avec le cercle inſcrit; & par conſéquent le ſphéroïde pourra alors être conſidéré comme une ſphère. D'où il ſuit que *la ſurface de la ſphère aura pour expreſſion le produit de ſon axe multiplié par la circonférence d'un de ſes grands cercles.* Ou bien appe-

lant cette ſurface s, ſon axe a, la circonférence du grand cercle c, on aura $s = ac$.

253. Il ſuit de-là, 1°. que *la ſurface de la ſphère eſt quadruple de celle de ſon grand cercle.* Car celle-ci (169) $= \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}c = \frac{1}{4}ac$, tandis que l'autre $= ac$.

254. 2°. Qu'*elle vaut la ſurface convexe du cylindre circonſcrit.* Car la hauteur de ce cylindre eſt néceſſairement a, & le contour de ſa baſe eſt c; donc ſa ſurface eſt ac, ainſi que celle de la ſphère. Archimède fit graver cette propoſition ſur ſon tombeau, parce qu'il l'avoit trouvée.

255. 3°. Qu'*elle eſt à la ſurface totale du cylindre circonſcrit* :: 2 : 3. Car pour avoir la ſurface totale du cylindre, à ſa ſurface convexe exprimée par ac (226), il faut ajouter celle de chaque baſe exprimée par $\frac{1}{4}ac$; ce qui donnera $ac + \frac{1}{2}ac$ ou $\frac{3}{2}ac$. Donc la

ſurface de la ſphère ſera à celle du cylindre :: $ac : \frac{3}{2}ac :: 2 : 3$.

256. *Remarque.* Par la manière dont on a trouvé la ſurface de la ſphère, on voit que celle d'une *calotte*, ou d'une *zone ſphérique* quelconque, ſera déterminée *en multipliant la portion de l'axe qu'elle renferme, ou bien ſon épaiſſeur, par la circonférence d'un grand cercle de la ſphère;* & qu'ainſi les ſurfaces de deux calottes ou de deux zones différentes de la même ſphère, ſont entr'elles comme leurs épaiſſeurs.

257. Théorême II. *La ſolidité de la ſphère a pour expreſſion le tiers de la ſurface multipliée par ſon rayon.*

Dém. Si l'on inſcrit un polyèdre dans une ſphère, la différence de ces deux ſolides deviendra d'autant plus petite, que le polyèdre aura plus de faces; de façon que ſi ce nombre de faces eſt infini, la différence de ces deux ſolides ſera nulle, & la ſphère pourra

ſolidité de la ſphère peut encore être exprimée par les deux tiers de l'axe multiplié par la ſurface d'un grand cercle.

Or, ſi l'on conçoit un cylindre circonſcrit à la ſphère & un cône inſcrit dans ce cylindre, le premier ſera exprimé par as, & le ſecond par $\frac{1}{3}as$. *Donc ces trois ſolides, ſavoir, le cône, la ſphère & le cylindre, ſeront dans le rapport des trois nombres* $\frac{1}{3}as, \frac{2}{3}as, as$: *ou bien comme* 1, 2, 3.

259. *Remarque.* Puiſque les ſphères peuvent être conſidérées comme des polyëdres d'une infinité de faces, on pourra toujours les prendre pour des ſolides ſemblables, & par conſéquent leurs ſurfaces étant comme les produits de deux dimenſions proportionnelles, & leurs ſolidités comme les produits de trois de ces dimenſions, on pourra dire que les premieres ſont entr'elles comme les quarrés, & les ſecondes comme les

cubes ou de leurs rayons, ou de leurs diamètres, ou des circonférences de leurs grands cercles, &c.

De la meſure des autres ſolides.

260. Pour les autres ſolides terminés par des ſurfaces planes, la méthode qui ſe préſente naturellement pour les meſurer, c'eſt de les imaginer compoſés de pyramides qui aient pour baſes ces ſurfaces planes, & pour ſommet commun, l'un des angles du ſolide dont il s'agit; mais outre que cette méthode eſt rarement la plus commode, elle eſt d'ailleurs moins expéditive & moins propre pour la pratique que la ſuivante.

Nous appellerons *priſme tronqué*, le ſolide ABCDEF [*Fig.* 100] qui reſte lorſqu'on a ſéparé une partie d'un priſme, par un plan ABC incliné à la baſe.

261. *Un priſme triangulaire tronqué*,

qué, eſt compoſé de trois pyramides qui ont chacune pour baſe, la baſe DEF *du priſme, & dont la première a ſon ſommet en* B, *la ſeconde en* A, *& la troiſième en* C.

Avec une légère attention, on peut ſe repréſenter le priſme tronqué, comme compoſé de deux pyramides, l'une triangulaire qui aura ſon ſommet au point B, & pour baſe le triangle DEF; la ſeconde qui aura auſſi ſon ſommet au point B, mais qui aura pour baſe le quadrilatère ADFC.

Si l'on tire la diagonale AF, on peut ſe repréſenter la pyramide quadrangulaire BADFC comme compoſée de deux pyramides triangulaires BADF, BACF; or la pyramide BADF eſt égale en ſolidité à une pyramide EADF qui ayant la même baſe, auroit ſon ſommet au point E; car la ligne BE étant parallèle au plan ADF, ces deux pyramides auront même hauteur; mais la

pyramide EADF peut être conſidérée comme ayant pour baſe EDF, & ſon ſommet au point A; voilà donc, juſqu'ici, deux des trois pyramides dont nous avons dit que le priſme tronqué doit être compoſé. Il ne reſte donc plus qu'à faire voir que la pyramide BACF eſt équivalente à une pyramide qui auroit auſſi pour baſe EDF, & qui auroit ſon ſommet en C; or c'eſt ce qu'il eſt facile de voir en tirant la diagonale CD, & faiſant attention que la pyramide BACF doit être égale à la pyramide EACF qui auroit même baſe & ſon ſommet au point E, & cela par la méme raiſon que ci-deſſus: mais la pyramide EACF eſt égale à la pyramide EDCF, parce qu'outre qu'elle a même hauteur, les deux baſes ACF & DCF ſont égales, parce que ce ſont deux triangles de même baſe CF, & qui étant compris entre mêmes paralèles CF & AD, ont néceſſairement

même hauteur ; or la pyramide EDCF peut être conſidérée comme ayant ſon ſommet en C, & pour baſe le triangle DEF. Le priſme tronqué eſt donc en effet compoſé de trois pyramides qui ont pour baſe commune le triangle DEF, & dont la première a ſon ſommet en B, la ſeconde en A, la troiſième en C.

262. Donc *pour avoir la ſolidité d'un priſme triangulaire tronqué, il faut abaiſſer, de chacun des angles de la baſe ſupérieure, une perpendiculaire ſur la baſe inférieure, & multiplier la baſe inférieure par le tiers de la ſomme de ces trois perpendiculaires.*

263. On peut tirer de cette propoſition pluſieurs conſéquences pour la meſure des priſmes tronqués autres que les triangulaires, & même pour d'autres ſolides. Si l'on conçoit, par exemple, que de tous les angles d'un ſolide terminé par des ſurfaces planes, on mène ſur un même plan, pris comme on le voudra,

des perpendiculaires, on fera naître autant de prismes tronqués qu'il y aura de faces dans le solide; comme chaque prisme tronqué devient facile à mesurer d'après ce que nous venons de dire, tout solide terminé par des surfaces planes, se mesurera donc aussi facilement par les mêmes principes: nous n'entrerons pas dans ce détail; nous nous bornerons à en tirer une conséquence utile à notre objet.

264. Soit donc ABCDEFGH [*Fig.* 101] un solide composé de deux prismes triangulaires tronqués..... ABCEFG, ADCEHG, dont les arrêtes AE, BF, CG, DH soient perpendiculaires à la base, & qui soient tels que les bases EFG, EHG forment le parallélogramme EFGH, & que les bases supérieures soient pour plus de généralité, deux plans différemment inclinés à la base EFGH. Il suit de ce qui a été dit ci-dessus, que le solide

ABCDEFGH est égal au triangle EFG multiplié par..... $\frac{BF+2AE+2GC+HD}{3}$; car le prisme tronqué ABCEFG est égal au triangle EFG multiplié par..... $\frac{BF+AE+GC}{3}$; & par la même raison le prisme tronqué ADCEHG est égal au triangle EHG, ou (ce qui revient au même) au triangle EFG multiplié par $\frac{AE+GC+HD}{3}$; donc la totalité de ces deux prismes tronqués, est égale au triangle EFG multiplié par..... $\frac{BF+2AE+2GC+HD}{3}$.

265. Soit maintenant un solide compris [*Fig.* 102] entre deux plans ABLM, *ablm* parallèles, deux autres plans AB*ba*, ML*lm*, parallèles entr'eux & perpendiculaires aux

deux autres, BL*lb* perpendiculaire à ceux-là, & enfin la ſurface courbe AHM*mha*; & concevons ce ſolide coupé par des plans C*d*, E*f*, G*h*, &c. parallèles aux premiers, également diſtans les uns des autres, & aſſez près pour qu'on puiſſe regarder AD, *ad*, DF, *df*, &c. comme des lignes droites: ſuppoſons enfin que les deux plans ABLM, *ablm* ſont aſſez près l'un de l'autre pour qu'on puiſſe regarder, ſans erreur ſenſible, les ſections D*d*, F*f*, H*h*, &c. comme des lignes droites; il eſt viſible que les ſolides partiels AD*dab*BC*c*, DF*fdc*CE*e*, &c. ſont dans le cas du ſolide de la *figure* 101. Donc la totalité de ces ſolides ſera égale au triangle *b*BC multiplié par $\frac{AB+2ab+2CD+cd}{3}+\frac{CD+2cd+2EF+ef}{3}+\ldots\ldots$

$$\frac{EF + 2ef + 2GH + gh}{3} + \ldots\ldots$$

$$\frac{GH + 2gh + 2IK + ik}{3} + \ldots\ldots$$

$$\frac{IK + 2ik + 2LM + lm}{3},$$ c'eſt-à-dire, en réuniſſant les quantités ſemblables, ſera égale au triangle bBC multiplié par $\frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + IK + ik + \frac{2}{3}LM + \frac{1}{3}lm$; & comme le triangle bBC eſt égal à $\frac{Bb \times BC}{2}$, le ſolide entier ſera égal à $\frac{Bb \times BC}{2} \times$ $(\frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + IK + ik + \frac{2}{3}LM + \frac{1}{3}lm)$.

266. Dans la vue de rendre cette expreſſion plus ſimple, remarquons que ſi au lieu de $\frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}ab + \frac{2}{3}LM +$

$\frac{1}{3} lm$ que l'on a entre les deux parenthèſes, on avoit la quantité $\frac{1}{2}$AB + $\frac{1}{2} ab + \frac{1}{2}$LM + $\frac{1}{2} lm$, le ſolide en queſtion ſeroit égal à la moitié de la ſomme des deux ſurfaces ABLM, *ablm*, multipliée par l'épaiſſeur B*b*, car la ſurface ABLM eſt égale à BC × ($\frac{1}{2}$AB + CD + EF + GH + IK + $\frac{1}{2}$LM) & la ſurface *ablm* eſt, par la même raiſon, égale à *bc* ou BC × ($\frac{1}{2} ab + cd + ef + gh + ik + \frac{1}{2} lm$); donc la moitié de la ſomme de ces deux ſurfaces multipliée par l'épaiſſeur B*b*, ſeroit $\frac{B b \times BC}{2}$ × ($\frac{1}{2}$AB + $\frac{1}{2} ab$ + CD + *cd* + EF + *ef* + GH + *gh* + IK + *ik* + $\frac{1}{2}$LM + $\frac{1}{2} lm$); donc le ſolide en queſtion ne diffère de ce produit, que de la quantité dont..... $\frac{B b \times BC}{2}$ × ($\frac{1}{3}$AB + $\frac{2}{3} ab$ + $\frac{2}{3}$LM + $\frac{1}{3} lm$) ſurpaſſe la quantité $\frac{B b \times BC}{2}$ ×

$(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}LM+\frac{1}{2}lm)$; or il eſt aiſé de voir que cette différence eſt $\frac{Bb\times BC}{2}\times(\frac{1}{6}ab-\frac{1}{6}+AB\,\frac{1}{6}LM-\frac{1}{6}lm)$; donc le ſolide cherché eſt égal à $\frac{Bb\times BC}{2}\times(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}ab+CD+cd+EF+ef+GH+gh+IK+ik+\frac{1}{2}LM+\frac{1}{2}lm)+\frac{Bb\times BC}{2}\times(\frac{1}{6}ab-\frac{1}{6}AB+\frac{1}{6}LM-\frac{1}{6}lm)$; or, il eſt aiſé de remarquer que $\frac{1}{6}ab-\frac{1}{6}AB+\frac{1}{6}LM-\frac{1}{6}lm$ eſt une quantité fort petite en comparaiſon de celle qui eſt entre les deux premières parenthèſes, puiſque les deux plans ABLM, *ablm* étant ſuppoſés peu diſtans, la différence de AB à *ab*, & celle de LM à *lm* ne peuvent être que de fort petites quantités; on peut donc réduire la valeur de ce ſolide à $\frac{Bb\times BC}{2}\times$

$(\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + IK + ik + \frac{1}{2}LM + \frac{1}{2}lm)$, c'eſt-à-dire, à..... $Bb \times \left(\frac{ABLM + ablm}{2}\right)$.

267. On peut donc dire que *pour avoir la ſolidité d'une tranche de ſolide compriſe entre deux ſurfaces planes parallèles de telle figure qu'on voudra, & peu diſtantes l'une de l'autre, il faut multiplier la moitié de la ſomme de ces deux ſurfaces, par l'épaiſſeur de cette tranche.*

268. Si l'épaiſſeur Bb de la tranche étoit trop conſidérable pour qu'on pût regarder Aa, Dd comme des lignes droites, il faudroit concevoir le ſolide partagé en pluſieurs tranches d'égale épaiſſeur, par des plans parallèles à l'une des ſurfaces ABLM, *ablm*, & meſurant ces ſurfaces ABLM, *ablm* & leurs parallèles, on auroit la ſolidité, en ajoutant toutes les ſurfaces

intermédiaires, & la moitié de la ſomme des deux extrêmes ABLM, *ablm*, & multipliant le tout par l'épaiſſeur d'une des tranches; c'eſt une ſuite immédiate de ce que nous venons de dire.

269. L'application de ceci à la meſure de la partie de la carène que la charge du navire fait plonger dans la mer, eſt maintenant très-facile. On meſurera la ſurface des deux coupes horiſontales faites à fleur d'eau, lorſque le navire eſt chargé, & lorſqu'il eſt vuide. On ajoutera ces deux ſurfaces, & on multipliera la moitié de leur ſomme par la diſtance de ces deux ſurfaces, c'eſt-à-dire, par l'épaiſſeur de la tranche qu'elles comprennent.

270. Si on vouloit avoir la ſolidité de la carène entière, on feroit uſage de ce qui vient d'être dit; mais il faut la conſidérer comme coupée en pluſieurs tranches, non pas parallèles à la coupe faite à fleur d'eau, mais

perpendiculaires à la longueur du navire.

271. Lorſqu'on meſure le volume de la partie de la carène que la charge fait plonger, on peut ſe contenter de meſurer la ſurface de la coupe priſe à égale diſtance des deux coupes dont nous avons parlé ci-deſſus, & la multiplier comme ci-devant par l'épaiſſeur de la tranche ; car cette coupe moyenne différera toujours très-peu de la moitié de la ſomme des deux autres.

Du Toiſé des Solides.

Après ce que nous avons dit ſur le toiſé des ſurfaces, il doit y avoir fort peu de choſes à dire ſur le toiſé des ſolides.

272. Pour évaluer un ſolide en toiſes cubes & parties de la toiſe cube, on peut s'y prendre de deux manières principales.

La première eſt de compter par toiſes cubes & par parties cubes de la toiſe cube, c'eſt-à-dire, par toiſes cubes, pieds cubes, pouces cubes, &c.

La *toiſe cube* ou *cubique* contient 216 pieds cubes, parce que c'eſt un cube qui a 6 pieds de long, 6 pieds de large & 6 pieds de haut.

Le *pied cube* contient 1728 pouces cubes, parce que c'eſt un cube qui a 12 pouces de long ſur 12 pouces de large, & 12 pouces de haut.

Par un raiſonnement ſemblable, on voit que le *pouce cube* contient 1728 lignes cubes, & ainſi de ſuite.

Donc pour évaluer un ſolide en toiſes cubes & parties cubes de la toiſe cube, il faudra réduire chacune de ſes trois dimenſions à la plus petite eſpèce, multiplier deux de ces dimenſions ainſi réduites l'une par l'autre, & le produit réſultant par le troiſième ; & pour réduire en lignes cubes, pouces cubes,

pieds cubes, & toiſes cubes, (en ſuppoſant que la plus petite eſpèce ait été des points), on diviſera ſucceſſivement par 1728, 1728, 1728 & 216, ou ſeulement par 1728, 1728 & 216, ſi la plus petite eſpèce eſt ſeulement des lignes; & ainſi de ſuite.

Par exemple, ſi l'on a un parallélipipède qui ait $2^T\,4^P\,8^P$ de long; $1^T\,3^P$ de large, & $3^T\,5^P\,7^P$ de haut, on réduira ces trois dimenſions à 200^P, 108^P & 283^P qui étant multipliés, ſavoir, 200 par 108, & le produit 21600^{PP} par 283^P, donneront 6112800 pouces cubes, ou 6112800^{PPP}; diviſant donc par 1728, on aura 3537 pieds cubes, ou 3537^{PPP} & 864 de reſte, c'eſt-à-dire, 864^{PPP}; diviſant 3537^{PPP} par 216, on aura 16 toiſes cubes, ou 16^{TTT} & 81^{PPP}; en ſorte que le parallélipipède en queſtion contient $16^{TTT}\,81^{PPP}\,864^{PPP}$.

273. Dans la ſeconde manière d'évaluer les ſolides en toiſes cubes & par-

ties de la toiſe cube, on ſe repréſente la toiſe cube partagée en ſix parallélipipèdes, qui ont tous une toiſe quarrée de baſe ſur un pied de haut, & que pour cette raiſon on appelle *toiſes-toiſes-pieds*. On conçoit de même la toiſe-pied, partagée en 12 parallélipipèdes, qui ont chacun une toiſe quarrée de baſe & un pouce de haut, & qu'on appelle *toiſes-toiſes-pouces*; on ſubdiviſe de même chacune de celles-ci en 12 parallélipipèdes, qui ont chacun une toiſe quarrée de baſe ſur une ligne de haut; on continue de ſubdiviſer en parallélipipèdes, qui ont conſtamment une toiſe quarrée de baſe ſur un point, une prime, une ſeconde, &c. de haut; en ſorte que les ſubdiviſions ſont abſolument analogues à celles de la toiſe linéaire, comme nous avons vu que l'étoient celles de la toiſe quarrée; & les noms de ces différentes ſubdiviſions, ne diffèrent de celles de la toiſe quar-

rée qu'en ce que le mot *toiſe* y eſt énoncé deux fois.

Les multiplications relatives à cette diviſion de la toiſe-cube, ſont abſolument les mêmes que celles que nous avons enſeignées relativement à la toiſe quarrée.

274. A l'égard de la nature des unités des facteurs, on doit regarder l'une d'entr'eux comme exprimant des toiſes-cubes, toiſes-toiſes-pieds, toiſes-toiſes-pouces, &c. & les deux autres comme marquant des nombres abſtraits dont le produit exprimera combien de fois on doit répéter ce premier facteur. Par exemple, en reprenant le parallélipipède que nous venons de calculer ci-deſſus, & ſuppoſant que la longueur AD [*Fig.* 103] eſt de $2^T\ 4^P\ 8^P$, la largeur AB de $1^T\ 3^P$, & la hauteur AL de $3^T\ 5^P\ 7^P$, ſi l'on prend AI & AE chacun d'une toiſe, & qu'on ſe repréſente le parallélipipède AIFEHGKD,

il eſt viſible que ce parallélipipède eſt de $2^{TTT}\ 4^{TTP}\ 8^{TTp}$, puiſqu'il a une toiſe quarrée de baſe ſur une longueur de $2^{T}\ 4^{P}\ 8^{p}$. Or, pour avoir la ſolidité du parallélipipède total, on voit qu'il faut répéter ce parallélipipède partiel d'abord autant de fois que ſa largeur AI eſt contenue dans la largeur AB, c'eſt-à-dire, une fois & demie, ou autant que le marque $1^{T}\ 3^{P}$; & répéter ce produit autant de fois que la hauteur AE eſt contenue dans la hauteur AL, c'eſt-à-dire, autant de fois que le marque $3^{T}\ 5^{P}\ 7^{p}$, conſidéré comme nombre abſtrait.

Mais, pour ſe guider plus aiſément dans ces multiplications, on laiſſera aux facteurs les ſignes de la toiſe tels qu'ils les ont; il ſuffit de ſavoir que le produit doit être des toiſes-cubes, toiſes-toiſes-pieds, &c. ainſi en opérant comme au toiſé des ſurfaces, on trouvera comme il ſuit :

2^{T}	4^{P}	8^{P}
1^{T}	3^{P}	0^{P}

2^{TT}	0^{TP}	0^{TP}	
0	3		
0	1		
0	0	4	
0	0	4	
1	2	4	
4^{TT}	1^{TP}	0^{TP}	
3^{T}	5^{P}	7^{P}	
12^{TTT}	0^{TTP}	0^{TTP}	0^{TTL}
0	3	0	
2	0	6	
0	4	2	
0	4	2	
0	2	1	
0	0	4	2
16^{TTT}	2^{TTP}	3^{TTP}	2^{TTL}

275. Il eſt aiſé de convertir ces parties de la toiſe, en parties cubes, c'eſt-à-

dire, pieds-cubes, pouces-cubes, &c. Il faut écrire ſous les parties de la toiſe, à commencer des toiſes-toiſes-pieds, les nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$, 36, 3, $\frac{1}{4}$ conſécutivement, & multiplier chaque nombre ſupérieur par ſon correſpondant inférieur; porter les produits des nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$, chacun au-deſſous du premier de ces nombres; & lorſqu'en multipliant par $\frac{1}{4}$, il reſtera 1, ou 2, ou 3, on écrira ſous le nombre 36 ſuivant, 432 ou 864, 1296, pour commencer une ſeconde colonne. Appliquant ceci à l'exemple que nous venons de donner,

16^{TTT}	2^{TTP}	3^{TTp}	2^{TTl}	0^{TTpt}
	36	3	$\frac{1}{4}$	36
16^{TTT}	72^{PPP}	.....		864^{PPP}
	9			
16^{TTT}	81^{PPP}			864^{PPP}

on trouve le même produit que par la première méthode.

On multiplie les toiſes-toiſes-pieds par 36, parce que la toiſe-toiſe-pied ayant un pied de haut ſur une toiſe quarrée, ou 36 pieds quarrés de baſe, doit contenir 36 pieds cubes. La toiſe-toiſe-pouce étant la douzième partie de la toiſe-pied, doit contenir la douzième partie de 36 pieds cubes, c'eſt-à-dire, 3 pieds-cubes; il faut donc multiplier par 3 les toiſes-toiſes-pouces. Pareillement la toiſe-toiſe-ligne étant la douzième partie de la toiſe-toiſe-pouce, doit contenir la douzième partie de 3 pieds cubes, ou un quart de pied cube, ou (à cauſe que le pied-cube vaut 1728 pouces cubes) elle doit contenir 432^{PPP}. En raiſonnant de même, on voit que la toiſe-toiſe-point vaudroit 36^{PPP}, parce qu'elle eſt la douzième partie de la toiſe-toiſe-ligne qui vaut 432^{PPP}, parce qu'elle eſt la douzième partie de la toiſe-toiſe-ligne qui vaut 432^{PPP}, dont la douzième partie eſt 36; donc, &c.

276. A l'égard de la diviſion, on a ſouvent à diviſer des parties ſolides par des parties ſuperficielles ou linéaires, ou du moins les nombres qui expriment ces parties. Ce cas a lieu, par exemple, lorſqu'on veut trouver quelle longueur ou largeur, ou hauteur, doit avoir un corps dont la ſolidité eſt connue, & dont la baſe auroit une ſurface connue ; ou quelle baſe il devroit avoir lorſque ſa longueur, ou ſa largeur, ou ſa hauteur doit être une quantité déterminée. En diviſant le nombre qui exprime la ſolidité, par la ſurface qui doit ſervir de baſe, on a la troiſième dimenſion, on a la ſurface qui doit ſervir de baſe ; puiſque la ſolidité réſulte du produit de ces deux facteurs. La manière de faire cette diviſion, eſt abſolument la même, que celle que nous avons donnée pour les nombres complexes dans l'Arithmétique.

Du Toiſé des Bois.

Ce qu'on vient de dire du *Toiſé* en général ne nous laiſſe que fort peu de choſes à dire ſur le *Toiſé des Bois.*

277. Dans la Marine on meſure les bois en pieds-cubes & parties cubes de pieds-cubes ; ainſi il ne s'agit que de meſurer les dimenſions en pieds & parties du pied, & les ayant multipliées (après les avoir réduites à la plus petite eſpèce), on réduira en lignes cubes, pouces cubes, pieds cubes, comme il a été dit ci-deſſus, mais en s'arrêtant aux pieds cubes.

278. Dans les bâtimens civils & les fortifications, l'uſage eſt de réduire en ſolives.

Par *ſolive*, on entend un parallélipipède de deux toiſes de haut ſur ſix pouces d'équarriſſage, ou 36 pouces quarrés de baſe ; ce qui eſt équivalent à un parallélipipède de 1 toiſe de haut ſur $\frac{1}{2}$ pied quarré, ou 72 pouces quarrés

de baſe, & qui par conſéquent contient 3 pieds cubes.

On partage la ſolive en ſix parties, chacune d'un pied de haut & de 72 pouces quarrés de baſe; & chacune de ces parties s'appelle *pied de ſolive*. On partage de même le pied de ſolive en douze parties d'un pouce de haut & de 72 pouces quarrés de baſe chacune, qu'on appelle *pouces de ſolive*, & ainſi de ſuite.

Puiſque la ſolive contient 3 pieds-cubes, ou la 72e partie d'une toiſe cube, & que ces ſubdiviſions ſont les mêmes que celles de la toiſe cube en toiſes-toiſes-pieds, &c. il s'enſuit que le nombre qui exprimeroit un ſolide quelconque, en ſolives & parties de ſolives, eſt 72 fois plus grand que celui qui l'exprimeroit en toiſes cubes, toiſes-toiſes-pieds, &c.

Ainſi pour évaluer la ſolidité d'un corps en ſolives, il n'y a qu'à l'évaluer

en toiſes cubes, toiſes-toiſes-pieds, &c. & multiplier enſuite le produit par 72. Mais on peut éviter cette multiplication en faiſant une réflexion aſſez ſimple. Il n'y a qu'à regarder l'une des dimenſions comme douze fois plus grande, c'eſt-à-dire, regardant les lignes comme exprimant des pieds, & ainſi de ſuite. Regarder pareillement une autre des trois dimenſions comme ſix fois plus grande, ou les lignes comme exprimant des demi-pouces, les pouces comme exprimant des demi-pieds; alors multipliant ces deux nouvelles dimenſions entr'elles & le produit par la troiſième, on aura tout de ſuite la ſolidité en ſolives, pieds de ſolive, &c. Par exemple, ſi l'on a une pièce de bois de $8^T\ 5^P\ 6^P$ de long ſur $1^P\ 7^P$ de large & $1^P\ 5^P$ d'épaiſſeur; au lieu de $1^P\ 7^P$, je prends $3^T\ 1^P$, c'eſt-à-dire, douze fois plus; & au lieu de $1^P\ 5^P$, je prends $1^T\ 2^P\ 6^P$; c'eſt-à-dire, ſix fois plus,

&

& multipliant $8^{T}\ 5^{P}\ 6^{P}$, par $3^{T}\ 1^{P}$; puis le produit, par $1^{T}\ 2^{P}\ 6^{P}$, je trouve $40^{TTT}\ 0^{TTP}\ 0^{TTp}\ 1^{TTl}$ qu'il faut compter pour $40^{sol.}\ 0^{P}\ 0^{p}\ 1^{l}$, dont les pieds, pouces, &c. ſont des pieds, pouces, &c. de *ſolives*.

Du Jaugeage.

Ce ſeroit ici le lieu de parler du *Jaugeage*, cette partie des Mathématiques dont l'objet eſt la meſure des vaſes, tonneaux, &c. deſtinés à renfermer des fluides; ſi on ſe ſervoit encore des anciennes *jauges*, c'eſt-à-dire, des anciens inſtrumens employés à cet uſage. Car ces anciennes *jauges* étoient fabriquées d'après la théorie des ſolides ſimples, tels que la ſphère ou le cylindre; c'eſt pourquoi elles étoient très-fautives. Le Contrôleur-Général Turgot, dont le nom rappelle les lumières & le déſintéreſſement, réforma en 1775 toutes

les jauges dont s'étoient ſervis juſqu'alors les Commis des Fermes générales & des Octrois. Il leur ſubſtitua une jauge calculée par M. *Dez*, Profeſſeur de Mathématiques à l'Ecole Militaire, eſſayée & approuvée par l'Académie des Sciences. L'uſage en eſt très-facile, & il ſe trouve imprimé chez les Ingénieurs qui conſtruiſent cette jauge appelée *Dezienne*, du nom de ſon inventeur. Nous n'en pouvons rien dire ici, parce que ſa conſtruction eſt fondée ſur les propriétés de la *parabole*, courbe dont on ne s'occupe que dans les ſections coniques.

USAGES DES INSTRUMENS RENFERMÉS DANS L'ETUI DE MATHÉMATIQUES ORDINAIRE.

Nous n'avons employé dans toute la Géométrie que la règle & le compas; cependant on fabrique pluſieurs autres inſ-

trumens de Mathématiques dont l'uſage abrége les opérations géometriques. Les plus ſimples ſont renfermés dans l'*étui* ordinaire. Nous allons faire connoître les *moyens* de connoître leur juſteſſe, & les *uſages* auxquels ils ſont propres.

Du Compas ſimple.

La bonté d'un compas conſiſte principalement dans les qualités ſuivantes. Il faut que le mouvement de ſa tête ſoit bien égal, qu'il ne ſaute point en l'ouvrant ou en le fermant; que les charnières ſoient bien ajuſtées; que le corps en ſoit limé, plat & bien poli; & enfin que les pointes d'acier ſoient bien jointes & bien égales.

De la Régle.

Les régles de cuivre ou de bois doivent être parfaitement droites en tous

ſens. Il y a un biſeau à un des bords, afin que l'encre ne ſaliſſe point le papier quand on tire des lignes à l'encre. Les régles doivent être un peu épaiſſes.

Pour connoître ſi une régle eſt bien droite, tracez une ligne ſur du papier, & retournez la régle bout pour bout; ſi la ligne tracée s'applique également tout le long de la régle, c'eſt une marque qu'elle eſt bien droite.

Du Tire-ligne.

Le tire-ligne eſt fait de deux lames d'acier jointes enſemble, & attachées au bout d'un baluſtre, à l'autre bout duquel eſt fixé un porte-crayon; les lames doivent être évidées en-dedans, afin que l'encre puiſſe y être introduite avec une plume; elles ſe joignent par les pointes qui doivent être bien égales. Il y a un petit coulant qui ſert à ouvrir & à fermer plus ou moins le tire-

ligne pour tracer des lignes fines ou groſſes, ſelon le beſoin.

Le porte-crayon doit être égal de groſſeur par-tout, & fendu bien droit par le milieu; on le courbe vers le bout, afin qu'on puiſſe ſerrer le crayon par le moyen d'un petit anneau qui doit être tourné bien juſte.

Des differentes pointes du Compas à pointes mobiles.

L'une de ces pointes mobiles eſt un porte-crayon deſtiné à tracer des cercles au crayon; l'autre eſt creuſée en forme de gouttière pour tracer des cercles à l'encre, qui s'introduit avec une plume dans cette gouttière. La troiſième eſt la pointe à roulette; elle ſert à tracer des cercles ponctués par le moyen de l'encre que l'on introduit avec une plume entre les deux lames qui contiennent la roulette. On peut ſe ſervir

de cette pointe pour tracer des lignes droites ponctuées.

De l'Echelle proportionnelle qui eſt tracée ſur une des branches de l'Equerre.

Elle ſert à diviſer une très-petite ligne en un grand nombre de parties, comme en 100, ou en 1000 parties égales. Soit, par exemple, propoſé la grande ligne de l'échelle à diviſer en 1000.

A ſes extrêmités élevez les perpendiculaires, portez ſur ces perpendiculaires 10 parties égales; tirez par ces diviſions autant de lignes parallèles à la donnée; diviſez ces lignes parallèles chacune en 10 parties égales, que vous joindrez par autant de perpendiculaires: ſubdiviſez enſuite la première diviſion de la donnée & de ſa parallèle en dix autres parties que vous joindrez par des

tranſverſales obliques tirées d'un intervalle de diviſion au ſuivant, comme du premier d'un côté au ſecond de l'autre côté, & ainſi des ſuivantes.

Par ce moyen, cette première diviſion ſe trouvera ſous-diviſée en 100 parties égales ; c'eſt pourquoi on continuera d'écrire les chiffres 200, 300, 400, 500, &c. juſqu'à 1000 au-deſſus & au-deſſous de ladite échelle, qui ſera diviſée en 1000 parties égales. On nomme ordinairement cette régle échelle de *dixme*, ou de dixième.

Pour s'en ſervir, & y prendre telle partie qu'on voudra, il faudra, pour 921, par exemple, prendre la longueur de la ligne horiſontale marquée 1, depuis la fin de l'échelle juſqu'à la rencontre de la tranſverſale marquée 20 & 3. Cette longueur contiendra 921 parties de l'échelle de 1000 parties.

Conſtruction & uſage de l'Equerre.

L'équerre eſt un inſtrument qui ſert à élever des perpendiculaires, & à connoître ſi une ligne tombe perpendiculairement ſur une autre. Elle eſt compoſée de deux régles de cuivre ou d'autre métal, aſſemblées de telle manière qu'elles forment un angle droit. On en fait quelques-unes dont les deux régles ou branches ſont attachées fixément, & d'autres qui s'ouvrent & ſe ferment par le moyen d'une charnière qui doit être bien juſte, afin que l'équerre ne vacille point, & qu'elle conſerve toujours ſon angle droit.

On ajuſte pour cela dans un petit canal fait à l'angle d'une des branches de l'équerre trois charnons ou petits bouts de cylindre, coupés bien droits d'une longueur & groſſeur convenables à la largeur & épaiſſeur de l'équerre.

Ces charnons doivent être éloignés l'un de l'autre de manière qu'ils puiſſent recevoir juſte deux autres charnons qui ſont ajuſtés de même à l'autre branche de l'équerre. Ces charnons étant ainſi arrêtés, on les ſoude aux branches, & enſuite on les unit l'un à l'autre par le moyen d'une goupille qui remplit juſte le trou des charnons, afin que le mouvement ſoit ferme.

Il y a des équerres où l'on met un fil avec un petit plomb, pour ſervir de niveau, c'eſt-à-dire, pour dreſſer un plan horiſontalement.

On trace ſur un des côtés de l'équerre pluſieurs meſures ou échelles, & ſur l'autre un demi-pied diviſé en *6* pouces, dont un pouce eſt ſubdiviſé en douze lignes. On y ajoute quelquefois pluſieurs meſures étrangères, dont on connoît le rapport avec le pied de Paris.

Elever d'un point donné une ligne perpendiculaire ſur une ligne donnée.

Appliquez un des côtés de l'équerre ſur la ligne donnée, en telle ſorte que l'autre côté touche le point donné, & tirez une ſeconde ligne le long de l'équerre; elle ſera perpendiculaire. Si l'on retourne l'équerre, en remettant deſſus ce qui étoit deſſous, & que l'on tire une autre ligne, on connoîtra ſi l'équerre eſt bien juſte; car en ce cas les deux lignes tirées par le point donné, ne ſeront qu'une ſeule & même ligne.

De la conſtruction & des uſages du Rapporteur.

Le rapporteur eſt un demi-cercle diviſé en 180 degrés.

Il doit être limé plat d'un côté pour être mieux appliqué ſur le papier, &

l'autre côté doit être en talus; c'eſt-à-dire, mince ſur le bord où eſt la diviſion. Le centre doit être marqué par une petite hoche demi-circulaire, afin de mieux découvrir le point où doit aboutir la pointe de l'angle.

Pour éprouver un rapporteur, portez le rayon ou demi-diamètre autour de la circonférence, il la diviſera en trois arcs égaux de 60 degrés, parce que le rayon d'un cercle eſt contenu ſix fois dans la circonférence. Diviſez un de ces ſix arcs en deux également, chaque moitié ſera de 30 degrés, & portant cette ouverture autour du demi-cercle, il ſera diviſé en ſix arcs égaux. Diviſez-les encore en trois parties égales, chacune ſera de dix degrés. Diviſez chaque dixaine en deux, vous aurez des arcs de cinq degrés chacun; & enfin ſubdiviſant chacun de ces derniers arcs en cinq, tout le demi-cercle ſera diviſé en 180 degrés, ſi le rapporteur eſt bien fait.

On fait auſſi des rapporteurs de cornes; ils ſont aſſez commodes, en ce qu'ils ſont tranſparens; mais il faut les tenir renfermés dans un livre, quand on ne s'en ſert pas; afin que la corne ne ſe ride point en ſe deſſéchant.

USAGE I. *Faire des angles de telle grandeur que l'on veut?*

Soit, par exemple, propoſé de faire un angle de 50 degrés ſur une ligne donnée.

Mettez le centre du rapporteur qui eſt marqué par une petite cavité ſur l'extrêmité de cette ligne de manière que le diamètre du demi-cercle s'y applique exactement. Marquez un point de crayon vis-à-vis le cinquantième degré, & de ce point tirez une ligne à l'extrêmité de la ligne donnée, elle fera avec la ligne donnée un angle de cinquante degrés.

USAGE II. *Un angle étant donné, ſavoir*

ſavoir combien il contient de degrés?

Mettez le centre du rapporteur au ſommet de l'angle, & ſon rayon ſur un côté, remarquez à quel degré l'autre côté coupe la circonférence; vous connoîtrez que l'angle donné comprend un nombre déterminé de degrés.

Uſage du Compas de proportion.

De toutes les pièces que renferme l'étui de Mathématiques ordinaire, la plus compliquée eſt le *Compas de proportion.* On conçoit aſſez facilement l'uſage des autres; mais les uſages de celle-ci demandent une explication détaillée que l'on cherche en vain dans les Cours de Mathématiques.

Le *compas de proportion* eſt ainſi nommé, parce qu'il ſert à déterminer les *proportions* entre les quantités de même eſpèce, entre une ligne & une autre ligne, entre une ſurface & une

autre ſurface, entre un ſolide & un autre ſolide, &c. &c.

On a coutume d'y tracer ſix ſortes de lignes; ſavoir, d'un côté la ligne des parties égales, celle des plans & celle des polygones; de l'autre côté la ligne des cordes d'arcs de cercle, celle des ſolides & celle des métaux.

On trace encore ſouvent ſur les bords du *Compas de proportion*, d'un côté une ligne diviſée ſervant à faire connoître le calibre des canons, & de l'autre côté une ligne ſervant à faire connoître le diamètre & le poids des boulets de fer depuis $\frac{1}{4}$ de livre juſqu'à 64^{lb}. L'explication de ces deux lignes ſe trouvera dans les *Uſages de la ligne des ſolides.*

Des uſages de la ligne des parties égales.

USAGE I. *Diviſer une ligne donnée*

en autant de parties égales qu'on voudra, comme, par exemple, en ſept?

Prenez avec un compas ordinaire l'étendue de toute la ligne propoſée, & la portez ſur la ligne des parties égales de part & d'autre à un nombre qui ſe puiſſe facilement diviſer par 7, comme pourroit être en cet exemple 70, dont la ſeptième partie eſt 10; ou bien au nombre 140, dont la ſeptième partie eſt 20. Enſuite laiſſant le compas de proportion ainſi ouvert, reſſerrez le compas commun juſqu'à ce que les deux pointes rencontrent les deux nombres 10, ſi l'on s'eſt ſervi du nombre 70, ou bien les deux nombres 20, ſi l'on a pris 140 pour l'étendue de toute la ligne, cette ouverture du compas commun ſera la ſeptième partie de la ligne propoſée.

Si la ligne propoſée à diviſer étoit trop longue pour être appliquée ſur les jambes du compas de proportion, portez-

en ſeulement une partie, comme la moitié ou le quart, que vous diviſerez comme il vient d'être dit, en 7; le double ou quadruple de cette ſeptième partie diviſera en 7 la grande ligne propoſée.

II. *Etant données pluſieurs lignes droites qui forment la circonférence ou périmètre d'un polygone, l'une deſquelles ſoit eſtimée contenir autant de parties égales qu'on voudra, trouver combien de ces mêmes parties ſont contenues en chacune des autres lignes du polygone.*

Prenez avec un compas commun la longueur de la ligne dont la meſure eſt connue, & la portez ſur la ligne des parties égales à l'ouverture du nombre qui exprime la meſure; le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, tranſportez-y la longueur de chacune des autres lignes, les nombres de l'ouverture que chacune comprendra, marqueront

leur véritable longueur. Si quelques-unes deſdites lignes ne convenoient pas juſtement au même nombre de part & d'autre ſur la ligne des parties égales, ſi par exemple, une des pointes du compas tombant ſur le nombre 29, l'autre tombât ſur le nombre 30, cette ligne contiendroit 29 & demi.

III. *Etant donnée une ligne droite, & le nombre des parties égales qu'elle contient, en retrancher une moindre ligne contenant tel nombre de ſes parties que l'on voudra?*

Soit pour exemple, la ligne propoſée de 120 toiſes, dont on veut retrancher une ligne de 25. Prenez avec le compas commun la longueur de la ligne propoſée; ouvrez le compas de proportion de telle ſorte que cette longueur convienne de 120 à 120 marqués ſur les deux lignes des parties égales, & ledit compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez ſur la même ligne la diſtance

de 25 à 25, que vous retrancherez de ladite ligne de 120 toiſes.

Par les trois uſages précédens, il eſt aiſé de voir que la ligne des parties égales du compas de proportion peut très-commodément ſervir d'échelle pour toutes ſortes de plans, pourvu qu'on ſache la quantité d'un des côtés du plan; & que l'on peut par ſon moyen réduire de petit en grand, ou de grand en petit.

IV. *A deux lignes droites trouver une troiſième proportionnelle, & à trois, une quatrième ?*

Si l'on ne propoſe que deux lignes, prenez avec un compas commun la longueur de la première, & la tranſportez ſur une des jambes du compas de proportion depuis le centre le long de la ligne des parties égales, pour en connoître la valeur, & du nombre où elle ſe terminera; ouvrez le compas de proportion en ſorte que la longueur de la ſeconde ligne convienne à ſon ouver-

ture ; ledit compas demeurant ainſi ouvert, portez la longueur de la ſeconde ligne ſur une des jambes depuis le centre, & remarquez le nombre des parties égales, où elle ſe termine, l'ouverture de ce nombre donnera la troiſième ligne proportionnelle requiſe.

Si, par exemple, la première ligne propoſée eſt de 40 parties égales, & la ſeconde de 20. Portez la longueur des 20 parties égales à l'ouverture de 40 ; & le compas reſtant ainſi ouvert, prenez l'ouverture de 20 à 20, cette ouverture ſera la longueur de la troiſième ligne proportionnelle que l'on cherche : ſi vous la meſurez ſur la ligne des parties égales depuis le centre, elle en contiendra 10, car 40 ſont à 20 comme 20 ſont à 10.

Que ſi à trois lignes données vous cherchez une quatrième proportionnelle, portez, comme nous venons de le dire, la ſeconde à l'ouverture de la première ;

& le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, portez la troiſième ligne ſur une de ſes jambes depuis le centre; l'ouverture du nombre où elle ſe terminera, donnera la quatrième requiſe.

Soit, par exemple, la première de ces trois lignes de 60 parties égales, la ſeconde de 30, & la troiſième de 50; portez la longueur de 30 parties égales à l'ouverture de 60; & le compas demeurant ainſi ouvert, prenez l'ouverture de 50; cette ouverture, qui contiendra 25, ſera la quatrième proportionnelle, car 60 ſont à 30 comme 50 à 25.

V. *Diviſer une ligne donnée ſelon une raiſon donnée?*

Qu'il faille, par exemple, diviſer la ligne donnée en deux parties, dont la raiſon ſoit égale à celle de 40 à 70; joutez enſemble ces deux nombres, eur ſomme ſera 110. Prenez avec un

compas commun la longueur de la ligne propoſée, que je ſuppoſe être 165 parties égales; portez cette longueur à l'ouverture des nombres 110 de la ligne des parties égales; & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez l'ouverture des nombres 40 & 70, la première de ces deux ouvertures donnera 60 & la ſeconde 105, qui ſeront les parties de la ligne propoſée à diviſer, puiſque 40 ſont à 70, comme 60 ſont à 105.

VI. *Ouvrir le compas de proportion, en ſorte que les deux lignes des parties égales faſſent un angle droit?*

Choiſiſſez trois nombres qui puiſſent exprimer les côtés d'un triangle rectangle, comme ſont, par exemple, les nombres 3, 4, 5, ou leurs multiples; mais comme il eſt mieux de les prendre un peu grands, nous choiſirons 60, 80 & 100. Prenez avec un compas commun la diſtance du centre du compas de pro-

portion ſur la ligne des parties égales juſqu'au nombre 100 ; ouvrez enſuite le compas de proportion de telle ſorte qu'une des pointes du compas commun tombe d'une part ſur le nombre 60 des parties égales, & l'autre pointe ſur le nombre 80 des mêmes parties égales de l'autre jambe ; alors le compas de proportion ſera ouvert de ſorte que les deux lignes de parties égales feront un angle droit.

VII. *Trouver une ligne droite égale à la circonférence d'un cercle donné ?*

Le diamètre d'un cercle eſt à la circonférence environ comme 100 à 314, ou comme 50 à 157 ; c'eſt pourquoi prenez avec un compas ordinaire la longueur du diamètre du cercle propoſé, & la portez ſur les jambes de 50 à 50 de part & d'autre de la ligne des parties égales ; le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez avec le compas commun la diſtance de

157 à 157, vous aurez une ligne droite à peu près égale à la circonférence du cercle proposé : je dis à peu-près, parce que la véritable proportion du diamètre d'un cercle à sa circonférence, n'a point encore été trouvée géométriquement.

Des usages de la ligne des plans.

La ligne des plans comprend depuis le centre du compas les côtés homologues d'un certain nombre de plans semblables multiples du plus petit, depuis 1 jusqu'à 64. On la construit en extrayant les racines quarrées des nombres doubles, triples, &c. du plus petit.

USAGE I. *Augmenter ou diminuer toutes sortes de figures planes, selon une raison donnée ?*

Soit, par exemple, proposé un triangle auquel on a dessein d'en faire un semblable qui soit triple en surface. Prenez avec un compas commun la lon-

gueur d'un côté du triangle donné ; portez-la ſur la ligne des plans à l'ouverture du premier plan ; le compas de proportion reſtant ainſi ouvert, prenez avec le compas commun l'ouverture du troiſième plan, & vous aurez la longueur du côté homologue d'un triangle triple en ſurface ; vous trouverez de la même manière les côtés homologues aux deux autres cotés du triangle propoſé. Si la figure plane propoſée a plus de trois côtés, diviſez-la en triangles par une ou pluſieurs diagonales. Si c'eſt un cercle que l'on veuille diminuer ou augmenter, il faut pratiquer le même *uſage I* ſur ſon diamètre.

II. *Etant données deux figures planes ſemblables, trouver quelle raiſon elles ont entr'elles ?*

Prenez lequel vous voudrez des côtés de l'une deſdites figures, & le portez à l'ouverture de quelque plan ; prenez enſuite le côté homologue de l'autre

figure, & voyez à l'ouverture de quel plan il convient ; les deux nombres auxquels conviennent les deux côtés homologues expriment la raiſon des plans entr'eux ; ſi, par exemple, le côté choiſi de la plus petite convient au quatrième plan, & que le côté homologue de l'autre convienne au ſixième; ces deux plans ſont entr'eux comme 4 eſt à 6, c'eſt-à-dire, que le grand contient une fois & demie la ſurface du petit; & ſi le petit plan contient vingt toiſes quarrées, le grand en contient trente.

Mais ſi le côté d'une figure ayant été mis à l'ouverture d'un plan, le côté homologue de l'autre ne peut s'ajuſter à l'ouverture d'aucun nombre entier, il faudra mettre le côté de la première figure à l'ouverture de quelqu'autre plan, juſqu'à ce qu'on trouve un nombre entier, dont l'ouverture convienne à la longueur d'un côté homologue de l'autre figure, afin d'éviter les fractions.

Si les figures propoſées ſont ſi grandes qu'aucuns de leurs côtés ne ſe puiſſent appliquer à l'ouverture des jambes du compas de proportion, prenez la moitié, le tiers, ou le quart de chacun des deux côtés homologues deſdites figures, & les comparant enſemble, vous aurez la proportion des plans entiers.

III. *Ouvrir le compas de proportion, en ſorte que les deux lignes des plans faſſent un angle droit?*

Prenez avec un compas commun ſur la ligne des plans depuis le centre l'étendue d'un nombre de plan tel que vous voudrez, comme, par exemple, 40; appliquez cette ouverture de compas ſur la même ligne des plans de part & d'autre à un nombre qui égale la moitié du précédent, comme 20; alors les deux lignes des plans feront au centre du compas un angle droit, puiſque par la conſtruction de la ligne des plans, le nombre marqué 40, qui fait comme le plus-

grand côté d'un triangle, repréſente un plan égal aux deux autres plans ſemblables marqués ſur les jambes du compas par les nombres 20.

IV. *Conſtruire un plan ſemblable & égal à deux ſemblables donnés ?*

Ouvrez le compas de proportion à angles droits par l'uſage précédent, & portez deux côtés homologues tels que vous voudrez des deux plans propoſés ſur la ligne des plans depuis le centre, l'un ſur une jambe & l'autre ſur l'autre jambe; la diſtance des deux nombres trouvés ſur le compas ainſi ouvert, donnera le côté homologue d'un plan ſemblable & égal aux deux autres.

Si, par exemple, le côté du moindre plan étant porté ſur une des jambes du compas de proportion depuis le centre, rencontre le quatrième plan, & que le côté homologue de l'autre plan, porté ſur l'autre jambe, rencontre le neuvième plan, la diſtance de 4 à 9 qui ſera

égale au treizième plan, ſi le compas eſt ouvert, comme il eſt dit, ſera le côté homologue d'un plan égal aux deux propoſés, par le moyen duquel il ſera facile de conſtruire le plan ſemblable.

On peut, par cet uſage, ajouter enſemble autant de plans ſemblables que l'on voudra, en ajoutant enſemble les deux premiers, puis à leur ſomme ajoutant le troiſième, & ainſi de ſuite.

V. *Etant donnés deux plans ſemblables & inégaux, en trouver un troiſième auſſi ſemblable & égal à leur différence?*

Ouvrez le compas de proportion, de ſorte que les deux lignes des plans faſſent un angle droit, & portez un côté du moindre plan ſur une des jambes depuis le centre; portez enſuite le côté homologue du plus grand plan, en mettant une des pointes du compas commun ſur le nombre où ſe termine le pre-

mier côté, ſon autre pointe rencontrera ſur l'autre jambe le nombre du plan requis.

Si, par exemple, ayant porté le côté du moindre plan depuis le centre, l'on trouve qu'il tombe ſur le 9 d'une jambe du compas de proportion, prenez avec un compas ordinaire l'étendue du côté homologue du plus grand plan, en mettant une de ſes pointes ſur ledit nombre 9, l'autre pointe marquera ſur l'autre jambe le nombre 4; c'eſt pourquoi prenant la diſtance dudit nombre 4 au centre du compas de proportion, vous aurez le côté homologue d'un plan ſemblable & égal à la différence des deux plans donnés, dont la raiſon eſt ici ſuppoſée de 9 à 13.

VI. *Entre deux lignes droites données, trouver une moyenne proportionnelle?*

Portez chacune des deux lignes données ſur la ligne des parties égales du

compas de proportion, afin de ſavoir le nombre que chacune en contient. Suppoſé, par exemple, que la moindre ligne ſoit de 20 parties égales, & la plus grande de 45; portez la plus grande, qui eſt 45, à l'ouverture du quarante-cinquième plan qui dénote le nombre de ſes parties; le compas de proportion reſtant ainſi ouvert, prenez l'ouverture du vingtième plan, qui marque le nombre des parties égales de la plus petite ligne; cette ouverture qui doit contenir 30 des mêmes parties, donnera la moyenne proportionnelle, car 20 ſont à 30, comme 30 ſont à 45.

Mais le plus grand nombre de la ligne des plans eſt 64, ſi quelqu'une des lignes propoſées contenoit un plus grand nombre de parties égales, on pourroit faire ladite opération ſur leurs moitiés, tiers ou quart en cette ſorte. Suppoſant, par exemple, que la moindre des lignes propoſées ſoit 32 & l'autre 72, portez

la moitié de la grande ligne à l'ouverture du trente-ſixième plan, & prenez l'ouverture du ſeizième, cette ouverture étant doublée donnera la moyenne proportionnelle que l'on cherche.

Des uſages de la ligne des polygones.

USAGE I. *Décrire un polygone régulier dans un cercle donné?*

La ligne des *polygones* eſt ainſi nommée, parce qu'elle comprend depuis le centre du compas juſqu'à ſes extrêmités les côtés homologues des dix premiers polygones réguliers inſcrits dans un même cercle, c'eſt-à-dire, depuis le triangle équilatéral juſqu'au dodécagone. Ces côtés ſont les cordes des angles du centre des polygones.

Prenez avec un compas commun la longueur du demi-diamètre du cercle donné, & l'ajuſtez à l'ouverture du nombre 6, marqué de part & d'autre

ſur la ligne des polygones, & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez l'ouverture des deux nombres égaux qui expriment le nombre des côtés du polygone que vous voulez décrire. Prenez, par exemple, l'ouverture de 5 à 5, pour décrire un pentagone; de 7 à 7 pour un eptagone, & ainſi des autres. Cette ouverture étant portée autour de la circonférence du cercle, le diviſera en autant de parties égales; & il ſera facile de décrire tout polygone régulier depuis le triangle équilatéral juſqu'au dodécagone.

II. *Sur une ligne donnée décrire un polygone régulier?*

Si, par exemple, vous voulez décrire ſur une ligne donnée un pentagone, prenez avec un compas commun la longueur de ladite ligne, & l'ayant appliquée à l'ouverture des nombres 5 marqués de part & d'autre ſur la ligne des polygones, laiſſez le compas de pro-

portion ainſi ouvert, & prenez ſur la même ligne l'ouverture de 6 à 6, qui ſera le demi-diamètre du cercle propre à décrire le pentagone régulier propoſé : c'eſt pourquoi, ſi avec cette ouverture vous décrivez des extrêmités de la ligne donnée, deux arcs de cercle, leur interſection ſera le centre dudit cercle.

Si l'on propoſe un eptagone, appliquez la longueur de la ligne donnée à l'ouverture des nombres 7 marqués de part & d'autre ſur la ligne des polygones, & prenez toujours l'ouverture de 6 à 6, pour trouver comme deſſus le centre d'un cercle dans lequel il ſera facile d'inſcrire l'eptagone dont chaque côté ſera égal à la ligne donnée.

III. *Couper une ligne donnée en moyenne & extrême raiſon ?*

Appliquez la longueur de la ligne donnée à l'ouverture des nombres 6 & 6 marqués de part & d'autre ſur la ligne des polygones ; & le compas de

proportion demeurant ainſi ouvert, prenez l'ouverture des nombres 10, qui ſont ceux du décagone. Cette ouverture donnera la moyenne, c'eſt-à-dire, le plus grand ſegment de la ligne propoſée; puiſque le plus grand ſegment du rayon d'un cercle coupé en moyenne & extrême raiſon, eſt la corde de 36 degrés, qui eſt la dixième partie de la circonférence.

Que ſi l'on ajoute cette moyenne au rayon du cercle, pour n'en faire qu'une ligne, le rayon deviendra la moyenne, & la corde de 36 degrés ſera le petit ſegment.

IV. *Sur une ligne donnée, décrire un triangle iſoſcèle, qui ait les angles de ſa baſe doubles de celui du ſommet?*

Appliquez la longueur de la ligne donnée à l'ouverture des nombres 10 marqués de part & d'autre ſur la ligne des polygones; & le compas de pro-

portion reſtant ainſi ouvert, prenez l'ouverture des nombres 6, pour avoir la longueur des deux côtés égaux du triangle qu'on veut conſtruire. Il eſt évident que l'angle du ſommet de ce triangle eſt de 36 degrés, & que chacun des angles de la baſe eſt de 72 degrés; or l'angle de 36 degrés eſt l'angle du centre d'un décagone.

V. *Ouvrir le compas de proportion, en ſorte que les deux lignes des polygones faſſent un angle droit?*

Prenez avec le compas commun ſur la ligne des polygones la diſtance depuis le centre du compas de proportion juſqu'au nombre 5, ouvrez enſuite le compas de proportion, de ſorte que cette diſtance ſoit appliquée d'une part ſur le nombre 6, & de l'autre part ſur le nombre 10 des deux lignes des polygones, elles feront au centre un angle droit, parce que le quarré du côté du pentagone eſt égal au quarré du côté

de l'hexagone, & au quarré du côté du décagone.

Des uſages de la ligne des cordes.

Cette ligne comprend depuis le centre du compas juſqu'aux extrêmités de ſes jambes les cordes de tous les degrés d'un demi-cercle qui a pour diamètre la longueur d'une jambe du compas. On a pris toutes les longueurs de ces cordes depuis le commencement du diamètre.

Remarque. Cette ligne des cordes tient lieu de *Table de Sinus*, parce que les cordes ſont doubles des ſinus. Lorſqu'on demandera le ſinus d'un angle, on portera 100 des parties égales du compas de proportion de 60 à 60 de la ligne des cordes; on y prendra enſuite l'ouverture d'un nombre double des degrés de l'angle donné; cette ouverture ſera le ſinus de l'angle donné. On portera enfin le ſinus le long des parties égales

égales depuis le centre, afin d'avoir ſa valeur en nombres proportionnels au rayon eſtimé de 100 de ces mêmes parties.

USAGE I. *Ouvrir le compas de proportion, de ſorte que les deux lignes des cordes faſſent un angle d'autant de degrés que l'on voudra ?*

Prenez avec un compas ordinaire le long de la ligne des cordes la diſtance depuis le centre de la charnière juſqu'au nombre des degrés propoſés ; ouvrez enſuite le compas de proportion, de manière que cette diſtance s'accorde aux deux nombres 60 marqués de part & d'autre ſur la ligne des cordes. Les deux parties de cette ligne formeront l'angle.

Si, par exemple, vous voulez qu'elles faſſent un angle de 40 degrés, prenez la diſtance du centre au nombre 40, & la portez à l'ouverture de 60 à 60. Si vous voulez un angle droit, prenez la diſtance du centre à 90 degrés, & la

portez pareillement à l'ouverture de 60 à 60 ; ainſi des autres.

II. *Le compas de proportion étant ouvert, trouver les degrés de ſon ouverture ?*

Prenez l'ouverture de 60 degrés, & la portez le long de la ligne des cordes depuis le centre, le nombre où elle ſe terminera, marquera les degrés de ſon ouverture.

C'eſt ſur la ligne des cordes que l'on place quelquefois des pinules pour meſurer un angle ſur la terre, ou pour y en faire un d'autant de degrés que l'on veut, en ajoutant un genouil au compas de proportion, & le plaçant ſur un pied, pour l'élever à la hauteur de l'œil, en pratiquant ce que nous venons de dire en ces deux uſages ; mais nous penſons qu'il eſt plus aiſé de ſe ſervir d'un demi-cercle diviſé, appelé *graphomètre*, pour faire ces ſortes d'opérations.

III. *Sur une ligne droite donnée, former un angle rectiligne d'autant de degrés qu'on voudra ?*

Décrivez ſur la ligne donnée un arc de cercle ayant pour centre le point auquel vous voulez former l'angle; portez le rayon dudit arc à l'ouverture de la corde de 60 à 60 degrés; le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez l'ouverture de la corde du nombre des degrés propoſés, & la portez depuis la ligne ſur l'arc que vous avez décrit; tirez enfin une ligne droite du centre par l'extrêmité de cet arc pour former l'angle requis.

Soit propoſé pour exemple de faire à l'extrêmité d'une ligne un angle de 40 degrés; ayant tracé à cette extrêmité un arc de cercle à diſcrétion, portez-en le rayon à l'ouverture de la corde de 60 degrés, parce que le rayon d'un cercle eſt toujours égal à la corde de 60 degrés du même cercle; prenez en-

ſuite l'ouverture de la corde de 40 degrés, & la portez ſur l'arc de cercle ; enfin tirant une droite par le centre & par l'extrêmité de cet arc, vous formerez un angle de 40 degrés.

On peut, par cet uſage, tracer toute figure rectiligne, dont les angles & les côtés ſont connus.

IV. *Etant donné un angle rectiligne, trouver combien de degrés il contient ?*

Du ſommet de l'angle donné comme centre, décrivez un arc de cercle, & portez ſon rayon à l'ouverture de la corde de 60 degrés ; prenez enſuite ſur le papier la corde de l'arc décrit entre les côtés qui forment l'angle, & cherchez ſur les jambes du compas de proportion à quelle ouverture elle convient, le nombre des degrés vous indiquera la valeur dudit angle.

V. *Prendre ſur la circonférence d'un cercle donné, un arc d'autant de degrés qu'on voudra ?*

Appliquez le rayon du cercle donné ſur les jambes du compas de proportion, à l'ouverture de la corde de 60 degrés; le compas demeurant ainſi ouvert, prenez l'ouverture de la corde du nombre de degrés propoſé, & la portez ſur la circonférence du cercle donné.

On peut, par cet uſage, inſcrire dans un cercle toutes ſortes de polygones, en connoiſſant leur angle du centre.

Soit, par exemple, propoſé de faire un pentagone régulier par la ligne des cordes. Ayant connu que ſon angle du centre eſt de 72 degrés, on porte le rayon du cercle à l'ouverture de la corde de 60 degrés; on prend enſuite l'ouverture de la corde de 72 degrés, laquelle étant portée ſur la circonférence du cercle donné, le diviſera en cinq également; ces cinq cordes étant tracées, ſeront les côtés du pentagone.

VI. *Sur une ligne donnée, décrire un polygone régulier.*

Si, par exemple, on propoſe de conſtruire un pentagone, dont l'angle du centre eſt de 72 degrés, portez la longueur de la ligne donnée à l'ouverture de la corde de 72 degrés, & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez l'ouverture de la corde de 60 degrés, avec laquelle, des extrêmités de la ligne donnée, vous décrirez deux arcs de cercle; le point de leur interſection ſera le centre d'un cercle dont la circonférence ſera diviſée en cinq parties égales par la ligne donnée; & cette corde de 60 degrés ſera égale au rayon du cercle.

Des uſages de la ligne des ſolides.

Cette ligne comprend depuis le centre du compas juſqu'aux extrêmités des branches, les côtés homologues de 64 ſolides ſemblables, multiples du premier. On la conſtruit en extrayant les

racines cubiques des nombres doubles, triples, &c. du plus petit.

USAGE I. *Augmenter ou diminuer tous ſolides ſemblables, ſelon une raiſon donnée ?*

Soit propoſé, par exemple, un cube; on en demande un qui ſoit double en ſolidité. Portez le côté du cube donné ſur la ligne des ſolides à l'ouverture de tel nombre que vous voudrez, comme par exemple, de 20 à 20, puis prenez l'ouverture d'un nombre double, comme eſt en cet exemple le nombre 40; cette ouverture eſt le côté d'un cube double du propoſé.

Si l'on propoſe une boule ou ſphère, & qu'on veuille en faire une autre qui ſoit trois fois plus groſſe; portez le diamètre de la boule propoſée à l'ouverture de tel nombre qu'il vous plaira, comme par exemple, de 20 à 20, & prenez l'ouverture de 60, ce ſera le diamètre d'une autre boule triple en ſolidité.

Si l'on propoſe encore un coffre parallélipipède rectangle qui contienne trois meſures de grains, & que l'on veuille en faire un autre ſemblable qui en contienne cinq ; portez la longueur de la baſe à l'ouverture du trentiéme ſolide, & prenez l'ouverture du cinquantième pour le côté homologue de celui qui eſt à faire ; portez enſuite la largeur à l'ouverture du même nombre 30, & prenez l'ouverture du cinquantième ſolide pour le côté homologue à ladite largeur ; de ces deux ouvertures ayant conſtruit un parallélogramme, prenez enfin la profondeur dudit coffre, & l'ayant portée à l'ouverture du trentième ſolide, vous prendrez l'ouverture du cinquantième ſolide, pour avoir le côté homologue, c'eſt-à-dire, la profondeur avec laquelle il ſera facile de conſtruire ledit parallélipipède rectangle, qui contiendra les cinq meſures propoſées.

Si les lignes ſont trop grandes pour être appliquées à l'ouverture du compas de proportion, prenez la moitié, tiers ou quart des unes & des autres, ce qui en proviendra après l'opération ſera moitié, tiers ou quart des dimenſions requiſes.

II. *Etant donnés deux corps ſemblables, trouver quelle raiſon ils ont entr'eux ?*

Prenez lequel vous voudrez des côtés de l'un deſdits corps propoſés, & l'ayant porté à l'ouverture de quelque ſolide, prenez le côté homologue de l'autre corps, & voyez à quel nombre des ſolides il convient ; les nombres auxquels ces deux côtés homologues conviennent indiquent la raiſon des deux corps ſemblables entr'eux.

Que ſi le premier ayant été mis à l'ouverture de quelque ſolide, le côté homologue du ſecond ne peut s'accommoder à l'ouverture d'aucun nombre,

portez le côté du premier corps à l'ouverture de quelqu'autre ſolide juſqu'à ce que le côté homologue du ſecond corps s'accommode à l'ouverture de quelque nombre des ſolides.

III. *Conſtruire & diviſer une ligne ſervant à connoître les calibres des boulets & des canons.*

L'expérience ayant appris qu'un boulet de fer fondu, de trois pouces de diamètre, pèſe quatre livres, il ſera facile de trouver les diamètres des autres boulets de différens poids & de même métal, en cette manière.

Portez l'étendue de trois pouces à l'ouverture du quatrième ſolide, & ſans changer l'ouverture du compas de proportion, prenez ſur la même ligne des ſolides les ouvertures de tous les nombres depuis 1 juſqu'à 64; portez toutes ces longueurs les unes après les autres ſur une ligne droite tracée ſur une régle ou le long d'une des jambes du com-

pas de proportion, & là où ces diamètres ſe termineront, marquez-y les chiffres qui feront connoître la peſanteur des boulets.

Pour marquer enſuite les fractions de la livre, comme un quart, une demi, trois quarts, portez le diamètre du boulet d'une livre à l'ouverture du quatrième ſolide, & prenez l'ouverture du premier ſolide pour le diamètre d'un quart de livre, l'ouverture d'un ſecond ſolide pour une demi, & celle du troiſième pour trois quarts de livre, ainſi du reſte.

Quand on connoît le calibre des boulets, on connoît auſſi le calibre du canon auquel ces boulets ſont propres, parce qu'ordinairement on donne deux ou trois lignes pour le *vent* des gros boulets, afin qu'ils puiſſent facilement y entrer; & les petits à proportion.

Les diamètres des boulets ſe meſurent avec un compas ſphérique.

IV. *Etant donnés pluſieurs ſolides ſemblables, en conſtruire un ſemblable & égal aux donnés ?*

Portez lequel vous voudrez des côtés de quelqu'un des corps propoſés à l'ouverture de quelque ſolide, & ajoutez à l'ouverture des autres ſolides les côtés homologues des autres corps. Ajoutez enſemble les nombres qui expriment ainſi leur proportion, & prenez l'ouverture de la ſomme provenue de cette addition, vous aurez le côté homologue d'un corps égal & ſemblable à tous les autres.

Suppoſons, par exemple, que le côté choiſi du premier corps étant porté à l'ouverture d'un cinquième ſolide, les côtés homologues des autres conviennent, l'un à l'ouverture du ſeptième, l'autre à celle du huitième ſolide. J'ajoute enſemble ces trois nombres 5, 7 & 8, leur ſomme eſt 20, c'eſt pourquoi l'ouverture du vingtième ſolide ſera

ſera le côté homologue d'un corps égal & ſemblable aux trois autres.

V. *Etant donnés deux corps ſemblables & inégaux, en trouver un troiſième ſemblable & égal à la différence des donnés?*

Portez lequel côté vous voudrez de l'un des corps à l'ouverture de quelque ſolide que ce ſoit, & voyez à quelle autre ouverture convient le côté homologue de l'autre corps; ôtez le moindre nombre du plus grand, & prenez l'ouverture du nombre reſtant, vous aurez le côté homologue du corps égal à la différence des deux.

Si, par exemple, le plus grand étant porté à l'ouverture du quinzième ſolide, le côté homologue du moindre convient à l'ouverture du neuvième, ôtant 9 de 15, reſte 6; c'eſt pourquoi l'ouverture du ſixième ſolide donnera le ſolide demandé.

VI. *Entre deux lignes données,*

trouver deux moyennes proportionnelles ?

Soient propoſées pour exemple deux lignes, dont l'une contienne 54 parties égales, & l'autre 16; ouvrez le compas de proportion, & portez la longueur de la ligne qui contient 54 parties égales à l'ouverture du cinquante-quatrième ſolide, & prenez l'ouverture du ſeizième, cette ouverture ſera la plus grande des deux moyennes proportionnelles qu'on cherche; & cette ligne, qui en cet exemple contient 36 des mêmes parties égales, étant portée à l'ouverture du cinquante-quatrième ſolide, ce qui ſe fait en reſſerrant les jambes du compas de proportion, prenez une ſeconde fois l'ouverture du ſeizième ſolide, vous aurez la moindre des deux moyennes proportionnelles qu'on cherche, laquelle dans cet exemple contiendra 24 des mêmes parties égales, tellement que ces quatre lignes ſeront

en proportion continue, & en même raiſon que ces quatre nombres 54, 36, 24, 16.

Si les lignes ſont trop longues, ou les nombres de leurs parties égales trop grands, il ne faut que prendre leurs moitiés, tiers, ou quarts, &c. & opérer comme ci-deſſus. Si, par exemple, on cherche deux moyennes proportionnelles entre deux lignes, dont l'une contient 32 & l'autre 256, je prends le quart de chacune de ces lignes qui ſera 8 & 64, je porte le prémier nombre 8 à l'ouverture du huitième ſolide, & je prends l'ouverture du 64 qui me donne 16 pour la première des deux moyennes proportionnelles; puis je porte la longueur de la ligne de 16 à l'ouverture du huitième ſolide, & l'ouverture du ſoixante-quatrième me donne une ligne de 32 parties égales, je multiplie ces deux nombres trouvés par quatre, pour les remettre en leur en-

tier, tellement qu'entre les deux lignes propoſées, la première des deux moyennes eſt de 94, & la ſeconde de 128, & ces quatre lignes en proportion continue ſont en même raiſon que ces quatre nombres, 32, 64, 128, 256.

VII. *Etant donné un parallélipipède, trouver le côté d'un cube qui lui ſoit égal.*

Cherchez un moyen proportionnel entre les deux côtés de la baſe du parallélipipède, enſuite entre la valeur du nombre trouvé & la hauteur du parallélipipède, cherchez le premier des deux nombres moyens proportionnels, lequel ſera le côté du cube cherché.

Soient les deux côtés d'un parallélipipède 24 & 54, & ſa hauteur 63, on demande le côté d'un cube qui lui ſoit égal; je porte la ligne de 54 parties égales à l'ouverture du cinquante-quatrième plan, & je prends l'ouverture du vingt-quatrième, laquelle portée ſur

la ligne des parties égales, me donnera 36 pour moyen proportionnel ; enſuite je porte 36 à l'ouverture du trente-ſixième ſolide, & je prends l'ouverture du ſoixante-troiſième, qui me donne un peu moins de 44 & demi pour le côté du cube égal au parallélipipède propoſé.

Des uſages de la ligne des métaux.

Cette ligne exprime depuis le centre juſqu'à l'extrêmité des branches du compas les côtés homologues de ſolides ſemblables faits des ſix métaux, d'après leurs peſanteurs reconnues. Les métaux ſont rangés dans ce ſens en commençant du centre. ☉, Or ; ♄, Plomb ; ☽, Argent ; ♀, Cuivre ; ♂, Fer ; ♃, Etain.

USAGE I. *Etant donné le diamètre d'un globe de quelqu'un des ſix métaux, trouver le diamètre d'un autre*

globe de même poids & d'un autre métal.

Prenez le diamètre donné, & le portez à l'ouverture des deux points marqués du caractère qui dénote le métal du globe donné, & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez l'ouverture des points cotés du caractère qui déſigne le métal dont on veut faire le ſecond globe ; cette ouverture donnera ſon diamètre. Soit, par exemple, le diamètre d'un globe de fer, on veut en faire un de plomb qui ſoit du même poids ; portez le diamètre du globe de fer à l'ouverture des points ♂ qui marquent le fer, & prenez enſuite l'ouverture des points ♄ qui dénotent le plomb ; cette ouverture donne la longueur du diamètre d'un globe de plomb d'un poids égal à celui du globe de fer ; & ainſi des autres.

Si au lieu de globes on propoſoit des ſolides ſemblables ayant pluſieurs faces,

on feroit la même opération pour trouver chacun des côtés homologues, les uns après les autres, afin d'avoir les longueurs, largeurs & épaiſſeurs des ſolides que l'on veut conſtruire.

II. *Trouver la proportion que les ſix métaux ont entr'eux ſelon leur peſanteur?*

On demande, par exemple, quelle proportion auroient entr'eux deux corps ſemblables de même grandeur & volume, mais de différens métaux.

Prenez ſur la ligne des métaux la diſtance du centre de la charnière juſqu'au point du caractère qui dénote le métal moins peſant des deux propoſés, qui eſt toujours le plus éloigné dudit centre; portez cette diſtance ſur la ligne des ſolides, à l'ouverture duquel nombre vous voudrez; & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez ſur la ligne des métaux la diſtance du centre de la charnière juſqu'au point

qui marque l'autre métal, & les portant ſur la ligne des ſolides, voyez ſi elle peut convenir à l'ouverture de quelque nombre; ſi elle y convient, ces deux nombres exprimeront la proportion des deux métaux propoſés, en permutant les nombres.

Soit propoſé, par exemple, de trouver quelle raiſon a le poids d'une certaine maſſe ou lingot d'or au poids d'un autre lingot d'argent ſemblable & de même volume? Comme l'argent pèſe moins que l'or, je prends la diſtance du centre de la charnière juſqu'au point coté ☽, & la porte à l'ouverture du cinquantième ſolide, puis je prends la diſtance du même centre au point marqué ☉, & trouve qu'elle convient environ à l'ouverture du vingt-ſeptième ſolide, peu plus, d'où je conclus que le poids de l'or eſt à celui de l'argent, comme 50 à 27 un ſixième, ou comme 100 à 54 un tiers; c'eſt-à-dire, que ſi

le lingot d'or pèſe 100 livres, celui d'argent peſera 54 livres & un tiers; & ainſi des autres métaux.

Si l'on veut exprimer la proportion des ſix métaux par de petits nombres, on trouvera que ſi un lingot d'or eſt ſuppoſé peſer 100 marcs, un lingot de plomb de même groſſeur & volume en peſera environ ſoixante & demi, un d'argent 54 un tiers, un de cuivre 47 un quart, un de fer 42 un dixième, & un d'étain 39.

III. *Etant donné quelque corps que ce ſoit de l'un des ſix métaux, trouver combien il faut d'un des cinq autres métaux, pour faire un corps ſemblable & égal au propoſé?*

Soit, par exemple, un vaſe d'étain, on propoſe d'en faire un autre d'argent tout ſemblable, & de même grandeur. Premièrement, je pèſe ce vaſe d'étain, & je trouve qu'il pèſe 36 livres; c'eſt pourquoi je prends ſur la ligne des mé-

taux la distance du centre du compas de proportion jusqu'au point marqué ☽, qui est le métal dont on veut faire le nouveau vase, je reporte cette distance à l'ouverture du trente-sixième solide qui est le poids supposé du vase d'étain ; je prends encore sur ladite ligne des métaux, la distance du centre au point marqué ♃, qui dénote le métal du vase d'étain, & portant cette distance à l'ouverture de quelque solide, je trouve qu'elle convient au cinquantième un peu plus : ce qui me fait connoître qu'il faut environ cinquante livres un quart d'argent, pour faire un vase semblable, & de même grandeur que celui d'étain proposé.

La preuve de cette opération se peut faire par le calcul, savoir en multipliant réciproquement ces différens poids par ceux d'un pied cube de chacun de ces métaux, comme en cet exemple multipliant 720 livres 22 onces, qui est le

poids d'un pied cube d'argent par 36 livres, qui eſt le poids du vaſe d'étain, & enſuite multipliant 516 livres 2 onces, qui eſt le poids d'un pied cube d'étain par 50 livres un quart qui eſt le poids du vaſe d'argent, les produits de ces deux multiplications doivent être à peu-près égaux.

IV. *Etant donnés les diamètres, ou les côtés de deux corps ſemblables, de divers métaux, trouver en quelle raiſon ſont les poids de ces deux corps?*

Soient donnés, par exemple, le diamètre d'un globe d'étain, & le diamètre d'un globe d'argent; il faut trouver la raiſon des poids de ces deux globes. Prenez le diamètre du premier, & le portez à l'ouverture des points ♄ qui dénotent le métal de ce globe; le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez l'ouverture des points ☽, qui dénotent le métal de l'autre globe; comparez cette ouverture avec le diamètre donné du ſecond globe, afin

de reconnoître si elle lui est égale, car en ce cas, les deux globes seroient de même pesanteur. Mais si le diamètre du globe d'argent est plus petit que l'ouverture des points), c'est une preuve que le globe d'argent pèse moins que celui d'étain. Pour connoître de combien il pèse moins, il faut comparer ensemble sur la ligne des solides le diamètre du globe d'argent & l'ouverture des points marqués). Pour cela, portez l'ouverture des points) à l'ouverture de quelque solide, comme par exemple, du soixantième : voyez ensuite à quel autre solide convient le diamètre du globe d'argent, & supposant qu'il convienne à l'ouverture du vingtième solide, c'est une preuve que le globe d'argent ne pèse que le tiers du globe d'étain.

V. *Etant donnés le poids & le diamètre d'un globe ou le côté de quelqu'autre corps d'un des six métaux, trouver*

trouver le diamètre ou le côté homologue d'un autre corps ſemblable d'un des cinq autres métaux, lequel ſoit d'un poids donné?

Soit, par exemple, le diamètre d'un globe de cuivre qui pèſe dix livres, on demande le diamètre d'un globe d'or qui pèſe quinze livres. Il faut premièrement trouver par la ligne des métaux le diamètre d'un globe d'or de poids égal à celui de cuivre, enſuite l'augmenter par la ligne des ſolides.

Portez pour cet effet le diamètre du globe de cuivre à l'ouverture des points ♀, qui dénotent le cuivre, & prenez l'ouverture des points ⊙, qui dénotent l'or, remarquez le diamètre de la boule d'or du poids de dix livres, & le portez à l'ouverture du dixième ſolide. Prenez enſuite l'ouverture du quinzième; cette dernière ouverture donnera le diamètre d'une boule d'or peſant quinze livres, comme on l'a demandé.

TABLE du poids des différentes matières, réduit au pied & au pouce cube.

	Pesanteur d'un pied cube.		*Pesanteur d'un pouce cube.*		
Or.....	1326 livres.	4 onces.	12 onces.	2 gros.	52 grains.
Mercure.....	946	10	8	6	8
Plomb.....	803	2	7	3	30
Argent.....	720	12	6	5	28
Cuivre.....	627	12	5	6	38
Fer.....	558	0	5	1	24
Etain.....	516	2	4	6	17
Marbre blanc..	188	12	1	6	0
Pierre de taille.	139	8	1	2	24

Plâtre.....	85	0	0	5	6
Ardoiſe.....	150	0	1	7	12
Tuile,.....	127	0	1	0	18
Eau de Seine..	69	12	0	5	12
Eau de Mer....	70	10	0	6	0
Vin.....	68	6	0	5	5
Cire.....	66	4	0	4	65
Huile.....	64	0	0	4	43

Fin de la Géométrie.

TABLE.

LIVRE SECOND.

DES SURFACES.

Des rapports & de la meſure des ſurfaces planes, page 1
Des ſurfaces planes conſidérées par rapport à leurs poſitions reſpectives, 21
De la diviſion des ſurfaces ou des héritages, 34
Du toiſé des ſurfaces, 47

LIVRE TROISIÈME.

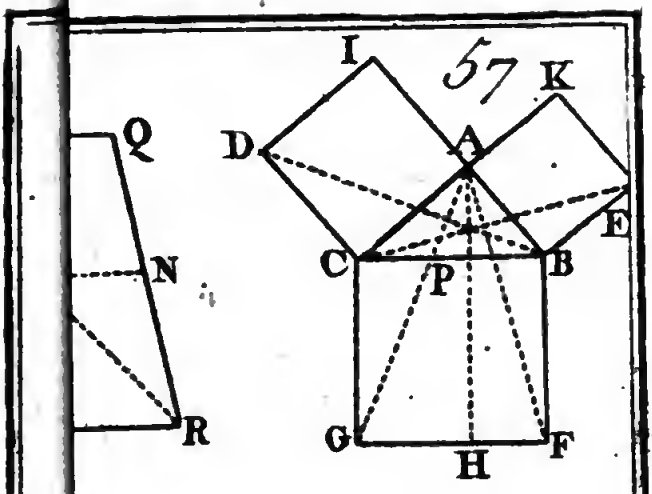
DES SOLIDES.

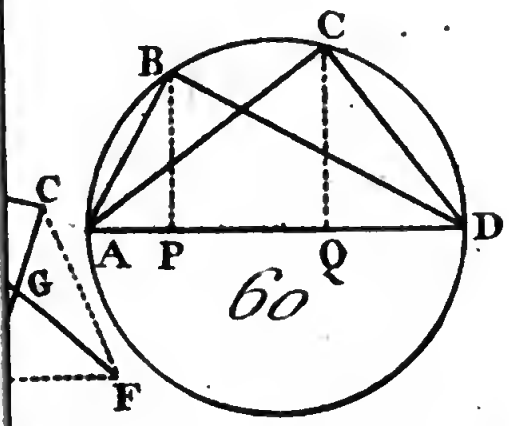
Notions générales ſur les Solides, & propriétés particulières du Priſme, 60
De la Pyramide, 81

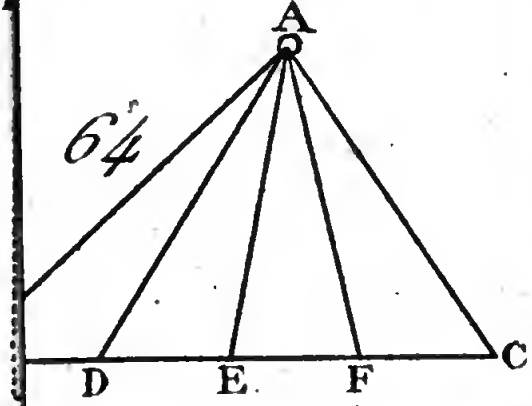
De la Sphère, 98
De la mesure des autres solides, 108
Du Toisé des Solides, 121
Du Toisé des Bois, 130
Du Jaugeage, 133
Usages des Instrumens renfermés dans l'Etui de Mathématiques ordinaire, 134
Du Compas simple, 135
De la Régle, ibid.
Du Tire-ligne, 136
Des différentes pointes du Compas à pointes mobiles, 137
De l'Echelle proportionnelle qui est tracée sur une des branches de l'Equerre, 138
Construction & usage de l'Equerre, 140
Elever d'un point donné une ligne perpendiculaire sur une ligne donnée, 142
De la construction & des usages du Rapporteur, ibid.
Usages du Compas de proportion, 145

Des uſages de la ligne des parties égales, 146
Des uſages de la ligne des plans, 155
Des uſages de la ligne des polygones, 163
Des uſages de la ligne des cordes, 168
Des uſages de la ligne des ſolides, 174
Des uſages de la ligne des métaux, 185
Table du poids de différentes matières réduit au pied cube & au pouce cube, 194

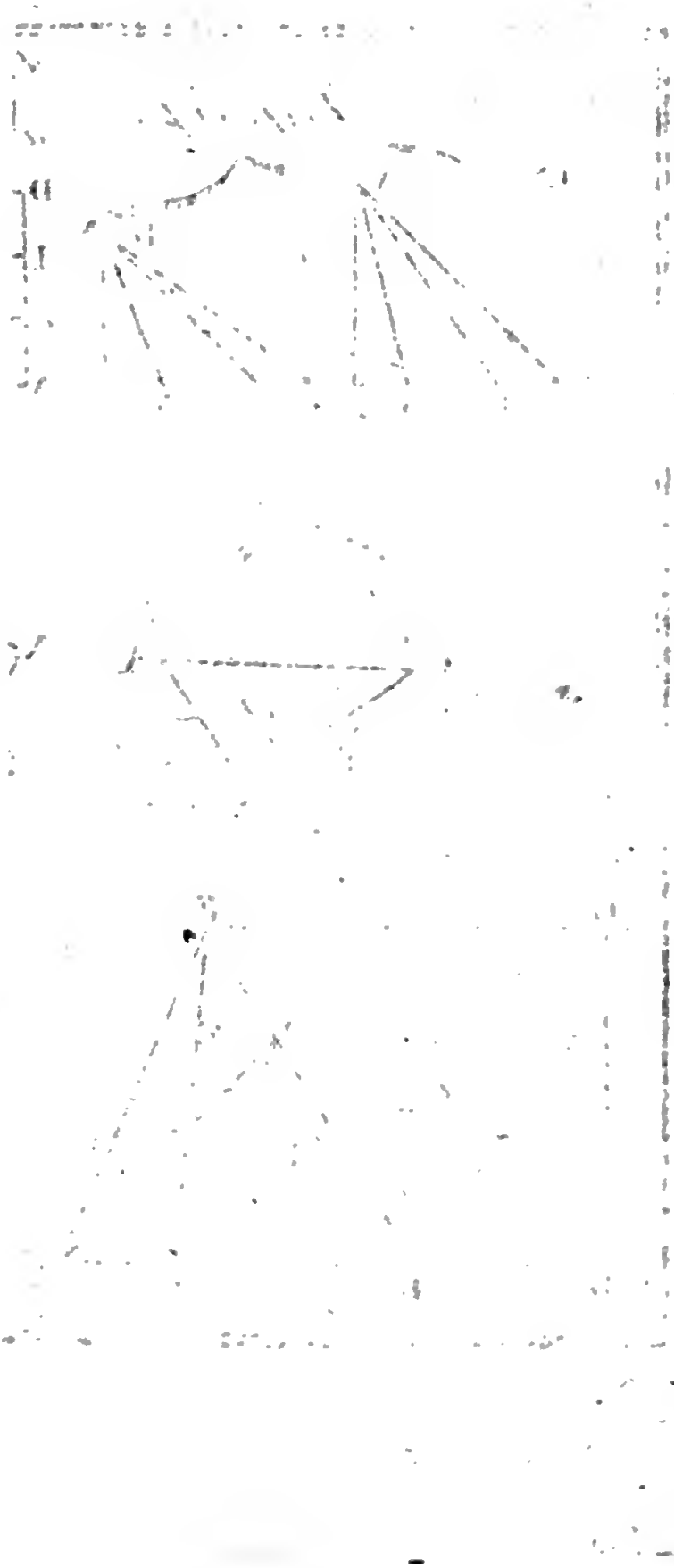
Fin de la Table.





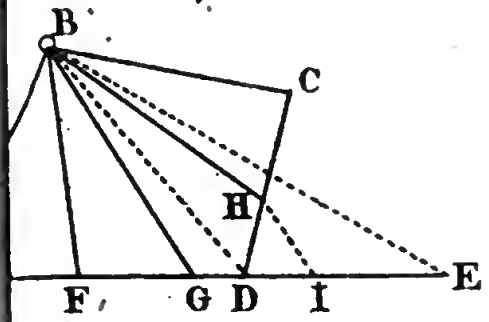


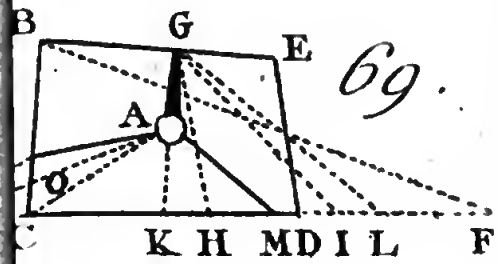
NAPOLI



Géom

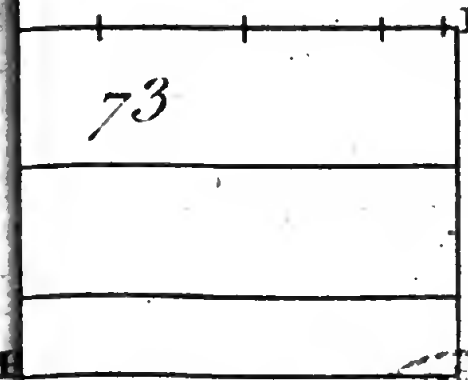
67





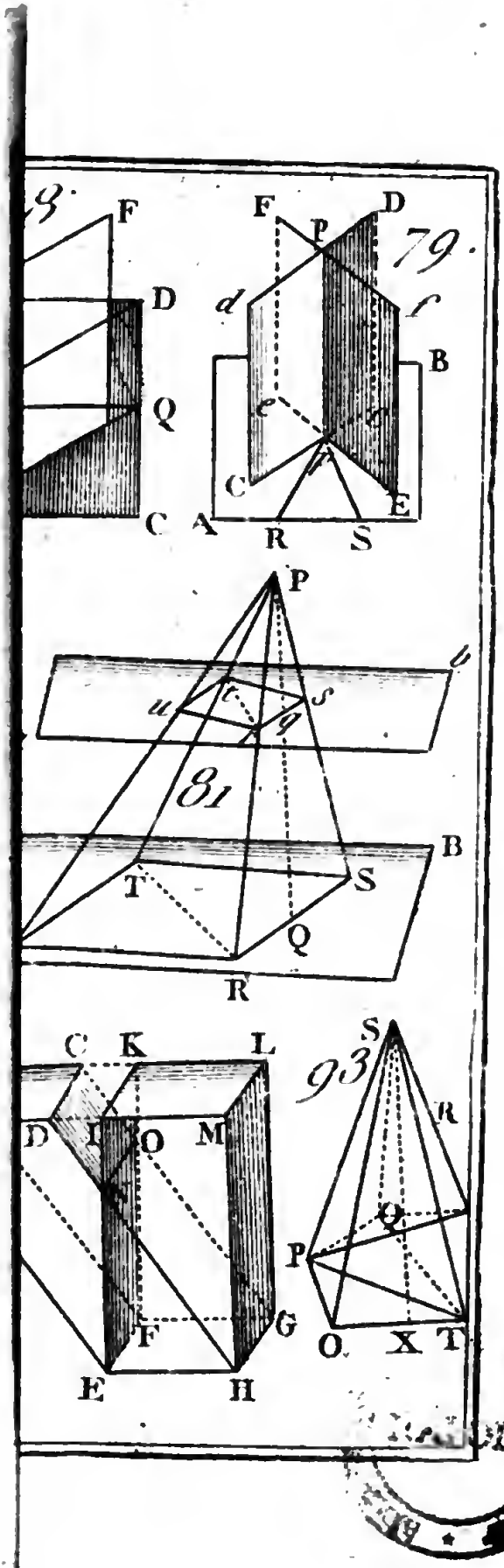
69.

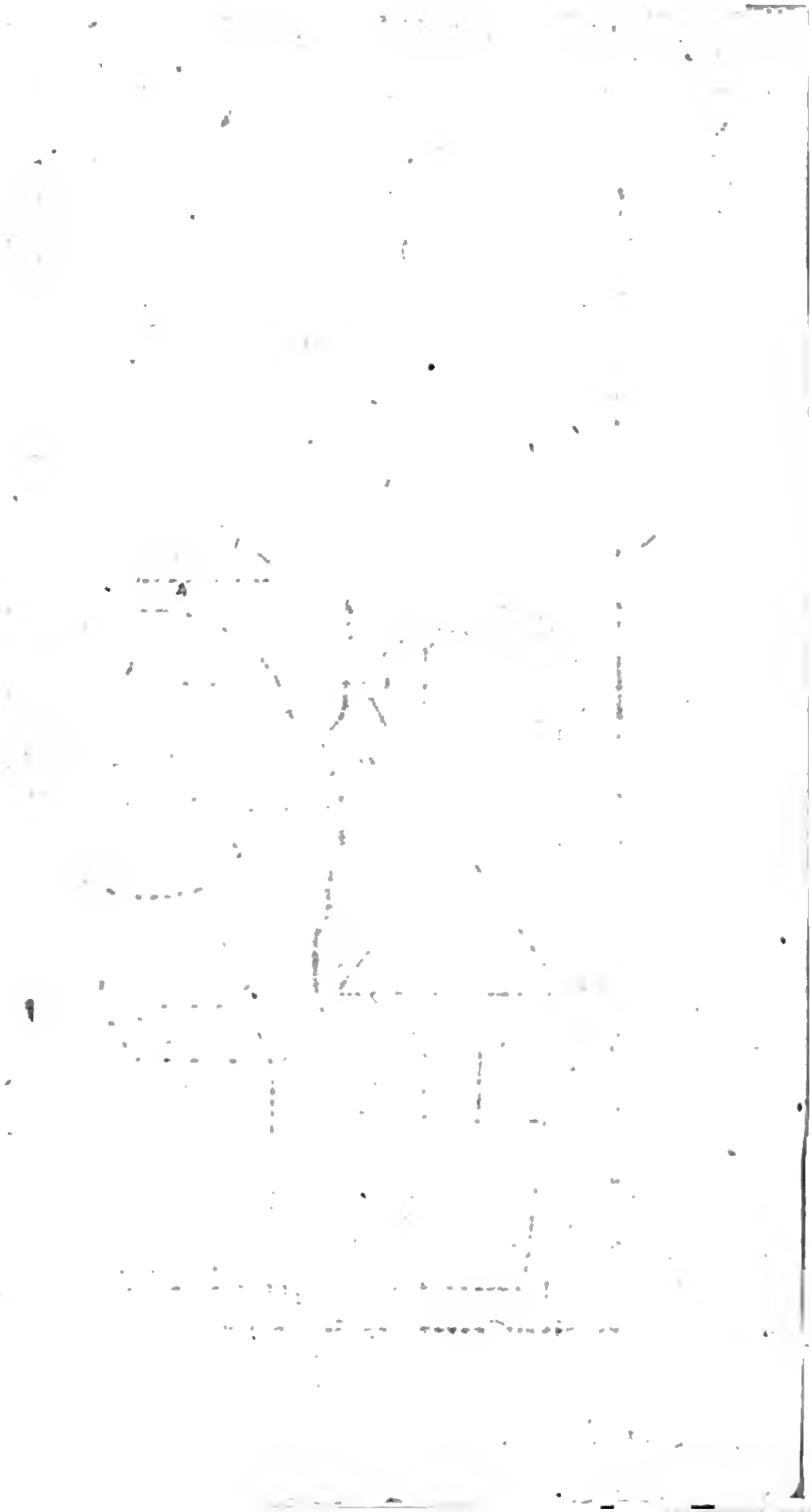
F

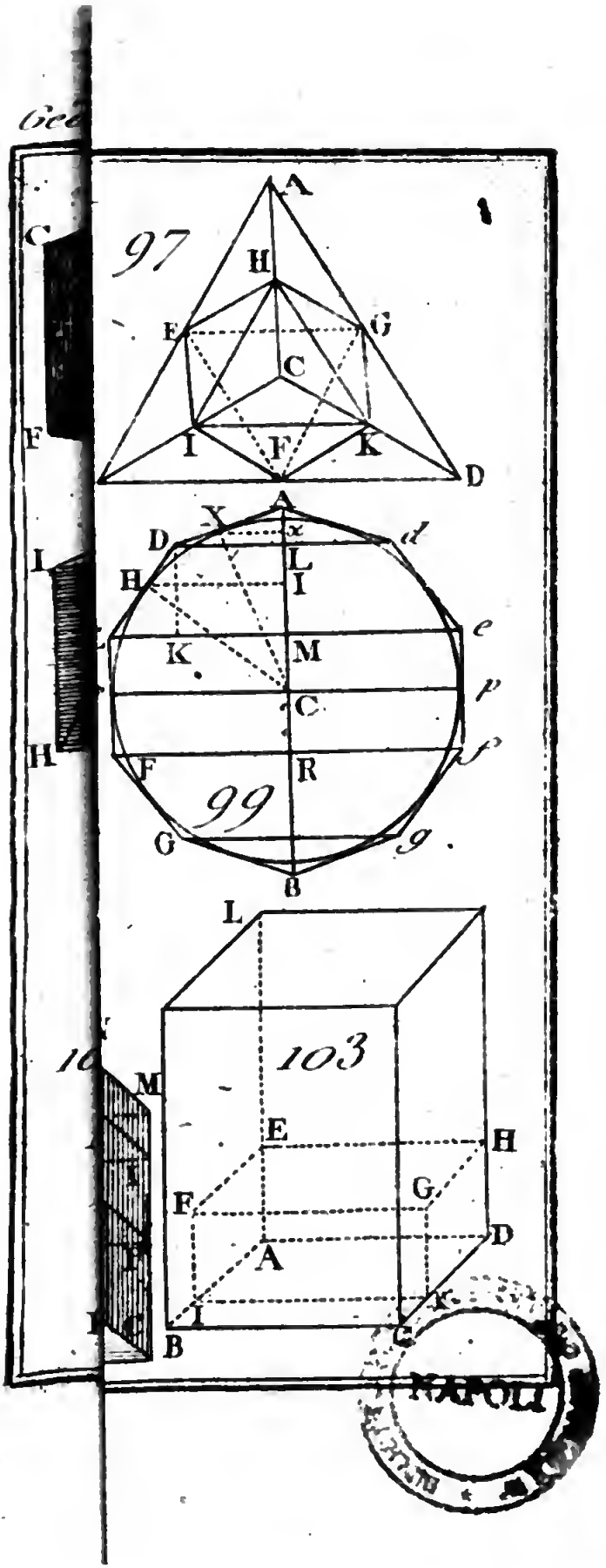


73

NAPOLI


F
D
Q
C
F
P
D
d
c
B
e
f
C
A
R
S
E
79.
P
b
u
r
s
q
81
B
T
S
Q
R
C
K
L
D
I
O
M
F
G
E
H
S
93
R
Q
P
O
X
T




97
A
H
E
G
C
F
I
F
K
D
X
D
d
L
H
I
e
K
M
C
p
F
R
99
G
g
B
L
103
M
E
H
F
G
D
A
I
K
B
NAPOLI